



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO



**Facultad de Ciencias
Departamento de Estadística
Escuela Ingeniería Estadística**

PROYECTO DE TÍTULO II, TITULADO:

**“ANÁLISIS ESPACIO TEMPORAL NO PARAMÉTRICO DE ROBOS
CON VIOLENCIA. UN CASO DE ESTUDIO EN CIUDAD DE BUENOS AIRES”**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE:
INGENIERA (o) ESTADÍSTICA (o)

AUTOR: HERRERA ALVAREZ, ARIEL ANTONIO

Profesor Guía: Faouzi, Tarik

CONCEPCIÓN, Enero de 2022

Índice general

Capítulo 1: Introducción	1
1.1. Objetivos	3
1.1.1. Generales	3
1.1.2. Específicos	3
Capítulo 2: Antecedentes Generales	4
2.1. Patrones Puntuales	4
2.2. Procesos Puntuales Espaciales	5
2.2.1. Estimación de la función de intensidad	5
2.2.2. Selección del parámetro ancho de banda	7
2.2.3. Test de similaridad entre dos procesos puntuales	11
2.2.4. Riesgo relativo espacial	12
2.2.5. Inferencia respecto del riesgo relativo	15
2.3. Procesos Puntuales Espacio Temporales	16
2.3.1. Estimación de la función de intensidad espacio temporal	17
2.3.2. Separabilidad del Proceso Puntual espacio temporal	17
2.4. Dependencia en Patrones Puntuales Espaciales	18
2.4.1. La función K	18
2.4.2. Test de hipótesis de AEC a partir de la función K	20
2.4.3. Dependencia espacio temporal entre eventos	21
2.5. Patrones Puntuales en el análisis de delitos	23
2.5.1. Indentificación de <i>hotspots</i>	23
2.5.2. Procesos Puntuales Auto-Excitados	24
Capítulo 3: Materiales y métodos	26

3.1. Área de estudio	26
3.2. Datos recolectados	30
3.3. Software	34
Capítulo 4: Resultados	36
Capítulo 5: Conclusiones	51
Apéndice A: Apéndice	54
A.1. Test de similaridad no paramétrico	54
A.2. Test de hipótesis de AETC	56
Bibliografía	61

Índice de cuadros

3.1. Comunas en CABA (*) Población proyectada para 2020 (Dirección General de Estadística y Censos, Ciudad de Buenos Aires)	28
3.2. Robos sin uso de armas y con uso de armas, por comuna	31
4.1. Test de hipótesis de similaridad entre los patrones de robo con y sin arma denunciados en CABA durante 2020.	38
4.2. Tabla con los valores-p, resultados de los test de similaridad de primer orden entre los patrones de robos observados en cada mes.	41
4.3. Test de hipótesis de separabilidad de proceso generador de delitos de robos con arma en CABA.	42
4.4. Test de hipótesis de separabilidad de proceso generador de delitos de robo sin arma en CABA.	44

Índice de figuras

2.1. En la figura de arriba a la izquierda, se ubica la densidad estimada mediante una parametrización diagonal del parámetro ancho de banda. En la figura de arriba a la derecha, el parámetro de ancho de banda utilizado en la función kernel es una matriz llena. En ambos casos, los datos son generados a partir de una mixtura de normales bivariadas (figura de abajo).	8
3.1. Población total por comuna (2020)	27
3.2. Evolución del número total de robos y tentativas de robos en la provincia de Buenos Aires y en CABA entre 2010 y 2019.	29
3.3. Tasa de robos y tentativas de robos cada 100.000 habitantes anual promedio por provincia (2010-2019).	30
3.4. Cantidad de robos denunciado por comuna (2020)	32
3.5. Tasa de robos cada 100.000 habitantes por comuna (2020)	33
3.6. Cantidad de robos por km ² por comuna (2020)	34
4.1. Robos con uso de armas y sin uso de armas, respectivamente, ocurridos en Ciudad de Buenos Aires durante 2020.	36
4.2. Estimación de la intensidad de primer orden de robos en Ciudad de Buenos Aires durante 2020	37
4.3. Estimación de densidad de robos denunciados en Buenos Aires durante 2020, con y sin uso de armas, respectivamente	37
4.4. Estimación de densidad temporal de robos en Buenos Aires durante 2020. Arriba, la densidad estimada de robos denunciados en CABA durante 2020. Abajo, las densidades kernel de los robos con uso de armas y sin uso de armas reportados. . .	39
4.5. Estimación de intensidad de robos con violencia en Buenos Aires (2020) por mes . .	40

4.6. Estimación del log-riesgo relativo de uso de armas en robos denunciados en Buenos Aires durante 2020. Las líneas blancas denotan los contornos de tolerancia al cinco por ciento de significancia.	41
4.7. Visualización del estadístico S, calculado para robos con arma en 12 días distintos del año.	42
4.8. Envolturas superiores, obtenidas a través de 999 patrones permutados, obtenidas para robos con arma en 12 días distintos del año. Las zonas rojas denotan áreas con una intensidad espacio temporal significativamente alta.	43
4.9. Envolturas inferiores, obtenidas a través de 999 patrones permutados, obtenidas para robos con arma en 12 días distintos del año. Las zonas rojas denotan áreas con una intensidad espacio temporal significativamente baja.	43
4.10. Visualización del estadístico S observado, calculado para robos sin arma en 12 días distintos del año.	44
4.11. Envolturas superiores, obtenidas a través de 999 patrones permutados, calculado para robos sin arma en 12 días distintos del año. Las zonas rojas denotan áreas con una intensidad espacio temporal significativamente alta.	45
4.12. Envolturas superiores, obtenidas a través de 999 patrones permutados, calculados para robos sin arma en 12 días distintos del año. Las zonas rojas denotan áreas con una intensidad espacio temporal significativamente baja.	45
4.13. Arriba, la función L no homogénea estimada para robos con arma denunciados en CABA durante 2020, junto con 39 patrones puntuales simulados y su respectiva región de aceptación. Abajo, la función K no homogénea teórica y la estimada. En rojo, las distancias donde existe un aglomeramiento significativo en el patron observado.	47
4.14. Arriba, la función L no homogénea estimada para robos sin arma denunciados en CABA durante 2020, junto con 39 patrones puntuales simulados y su respectiva región de aceptación. Abajo, la función K no homogénea teórica y la estimada. En rojo, las distancias donde existe un aglomeramiento significativo en el patron observado.	48
4.15. Función K no homogénea espacio temporal estimada, para robos con arma en CABA durante 2020. En gris, los rangos espacio temporales en los cuales la K estimada es significativa al 5 % (superior al valor crítico simulado)	49

4.16. Función K no homogénea espacio temporal estimada, para robos con arma en CABA durante 2020. En gris, los rangos espacio temporales en los cuales la K estimada es significativa al 5% (superior al valor crítico simulado)	50
--	----

Resumen

En este trabajo realizamos un análisis no paramétrico de los patrones espaciales y temporales de robos denunciados en Ciudad de Buenos Aires durante 2020. Primero, mediante el estimación vía kernel de la intensidad caracterizamos el patrón espacial de los robos, con especial énfasis en la identificación de *hotspots*. Luego, comparamos la distribución espacial de robos con uso de armas y sin uso de armas a partir de la intensidad de primer orden estimada para cada caso, y mediante el test de bondad de ajuste del tipo Cramér-Von Mises contrastamos la hipótesis de similaridad para ambos patrones puntuales. El riesgo espacial del uso de armas en un robo se estimó mediante la función log-riesgo relativo, a partir de la cual detectamos posibles hotspots. Además, mediante el test de separabilidad espacio temporal del proceso puntual, verificamos si la distribución espacial de robos con y sin uso de armas varía en el tiempo. Por último, mediante el test de dependencia entre eventos basado en la función K , contrastamos la hipótesis de aleatoriedad espacio temporal espacial. Este último resultado nos sugirió un comportamiento aglomerativo entre los robos denunciados en Buenos Aires durante 2020.

Capítulo 1

Introducción

Los robos, así como otros fenómenos naturales y socioeconómicos tales como incendios, tornados y accidentes de tránsito, pueden ser representados como eventos que ocurren irregularmente en el espacio y tiempo de forma aleatoria. Con el objeto de analizar este tipo de datos, es frecuente suponer que la ocurrencia de estos eventos está gobernada por un proceso espacio temporal, el cual es de naturaleza estocástica. Los modelos de procesos puntuales han sido aplicados también en el modelamiento de eventos delictivos, desde hurtos en lugares habitados y no habitados (Chainey et al., 2008; Mohler et al., 2011; Woodworth et al., 2014) a delitos violentos (Mohler, 2014; Taddy, 2010).

El modelamiento de datos de delitos ha estado focalizado principalmente en la detección de *hotspots*; esto es, áreas en las cuales existe una concentración de delitos relativamente más alta que en el resto de la región de interés (Chainey et al., 2008). Al respecto, se pueden identificar dos tipos de hotspots: crónicos y temporales. Los hotspots crónicos se caracterizan por tener una alta concentración de eventos delictuales durante un período prolongado de tiempo, y generalmente requieren de políticas orientadas a reducir la actividad criminal atacando sus causas. En tanto, los hotspots temporales persisten en una escala de tiempo de semanas o meses, pueden presentar un comportamiento contagioso y suelen ser abordados mediante una mayor presencia policial (Mohler, 2014).

Las técnicas más usadas en la detección de hotspots incluyen estimación de densidad por kernel (Bowers et al., 2004; Chainey et al., 2008; Gerber, 2014) y Procesos Puntuales Auto-Excitados (Mohler et al., 2011; Reinhart, 2018). La estimación de densidad espacial por kernel es una herramienta para la identificación y mapeado de hotspots, la cual puede ser utilizada para la predicción de crímenes futuros. También, como extensión a los hotspots estáticos, se puede

generar mapeados *prospectivos* de hotspots a través de kernels espacio temporales (Bowers et al., 2004; Johnson, 2008; Johnson et al., 2007). Por otro lado, ciertos tipos de crímenes muestran una dependencia del pasado inmediato, lo cual se expresa en un comportamiento “enjambre” de los eventos delictuales. Esta propiedad da entrada al uso de Procesos Puntuales Auto-Excitados (PPAE)- históricamente utilizados para representar patrones en la ocurrencia de terremotos (Ogata, 1998a) - en el modelamiento de datos de crímenes (Mohler et al., 2011). Los PPAE atribuyen los patrones criminales observados a un proceso *Poisson* estacionario, el cual estima hotspots crónicos, y a un componente análogo al utilizado en el mapeado prospectivo, el cual captura el efecto “enjambre” en el tiempo aledaño a la ocurrencia de los eventos delictivos. Ambas técnicas - estimación de densidad por kernel y PPAE -, pueden ser mejoradas a través de la incorporación de covariables, tales como variables demográficas, socioeconómicas, así como indicadores de riesgo específicos (Kennedy et al., 2011a; Mohler, 2014).

La utilización de los procedimientos indicados anteriormente implica adoptar una serie de supuestos, los cuales pueden no cumplirse en una aplicación dada. Por ello, la realización de test de hipótesis previo a la elección del modelo es un paso crucial en el descubrimiento de los patrones de crímenes. Sin embargo, sólo algunos trabajos en el campo de la criminología han adoptado esta práctica para el caso espacio temporal (Loeffler and Flaxman, 2018; Wooditch and Weisburd, 2016). En especial, Loeffler y Flaxman (2018) contrastaron si los delitos de violencia con arma de fuego presentan un aglomeramiento espacio temporal, o si efectivamente los eventos tienen un comportamiento contagioso en un tiempo y espacio aledaños.

En este trabajo se analizará un conjunto de datos de delitos de robo con violencia en Ciudad de Buenos Aires en 2020, obtenidos a partir de la base de datos de Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (CABA), el cual contiene datos sobre los hechos delictivos (Homicidios Dolosos, Homicidios, Lesiones por Siniestros Viales, Robos y Hurtos). Las variables a considerar de este conjunto de datos son las coordenadas geográficas y la fecha de ocurrencia de los robos, además de uso de arma o no uso en la perpetración del delito. Estos datos constituirán una realización de un proceso espacio temporal marcado, el cual puede ser modelado mediante cualquiera de los métodos indicados anteriormente. La selección de un modelo adecuado para modelar el patrón de robos violentos en Ciudad de Buenos Aires constituye entonces, el problema principal en este trabajo.

1.1. Objetivos

1.1.1. Generales

- Analizar el comportamiento espacio temporal de los robos con violencia en Ciudad Autónoma de Buenos Aires, y a partir de éste seleccionar el modelo más adecuado para la predicción de futuros hotspots de delitos.

1.1.2. Específicos

- Verificar si la distribución de robos violentos con presencia de armas y sin armas en Buenos Aires son similares.
- Verificar si la distribución espacial de los robos con violencia en Buenos Aires varía en el tiempo.
- Inferir si existe un comportamiento de dependencia entre los robos perpetrados en Ciudad de Buenos Aires.

Capítulo 2

Antecedentes Generales

2.1. Patrones Puntuales

Un patrón puntual es un conjunto de puntos - denominados también *eventos* - distribuidos irregularmente en una región, donde el conjunto se presume generado a partir de un mecanismo estocástico (Diggle, 2013). Ejemplos de patrones puntuales son:

- Ubicaciones de árboles en una plantación forestal;
- Direcciones de individuos infectados con Cólera en cierta ciudad;
- Sitios de focos de incendios en una región geográfica determinada;
- Ubicaciones de glóbulos rojos en imágenes microscópicas de células sanguíneas.

Al observar un patrón puntual, surge la duda natural: ¿los eventos están distribuidos aleatoriamente? Están agrupados? La respuesta a tales interrogantes debe basarse en algún criterio objetivo, ya que la cantidad de *aleatoriedad* o *agrupamiento* percibida puede variar dependiendo del observador. También puede ocurrir que los eventos de un patrón puntual estén distribuidos regularmente, lo cual indicaría cierta interacción entre los eventos.

Como un primer paso en el análisis de un patrón puntual, se busca contrastar la hipótesis de Aleatoriedad Espacial Completa (AEC). Para ello, es necesario considerar modelos estocásticos como mecanismos generadores de los patrones puntuales en estudio. Luego, las conclusiones que se obtengan a partir del contraste de la hipótesis de aleatoriedad aplican al mecanismo estocástico; los puntos observados son *fijos* y no hay nada de aleatorio en ellos.

2.2. Procesos Puntuales Espaciales

Los procesos puntuales espaciales son modelos estocásticos que describen la distribución de eventos, dispuestos irregularmente en un espacio d -dimensional $S \subset \mathbb{R}^d$ (Illian et al., 2008). En particular, un proceso puntual espacial *localmente finito* cumple las siguientes condiciones:

- Para cualquier sub-región acotada $W \subset S$, el número de eventos generados dentro de W es finito;
- Para cualquier sub-región acotada $W \subset S$, el número de eventos generados dentro de W es una variable aleatoria.

Sea un patrón puntual dado por el conjunto de eventos $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_N\}$, el cual ocurre en la región acotada planar $W \in \mathbb{R}^2$, de área $|W| > 0$. Suponiendo que $\mathbf{x}$ constituye una realización de un proceso puntual espacial $\mathbf{X}$, es de interés caracterizar el proceso puntual en estudio. Una manera de hacerlo es mediante la función de intensidad de primer orden $\lambda(\cdot)$ (Diggle, 2013), definida por

$$\lambda(x) = \lim_{|dx| \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N(dx)]}{|dx|}, \quad (2.1)$$

donde dx es una región infinitesimal que contiene a x , $|dx|$ denota el área de dx , y $N(dx)$ el número de eventos en tal región. Un proceso puntual es *homogéneo* si su intensidad de primer orden es constante; esto es, $\lambda(x) = \lambda > 0, \forall x$; de lo contrario, el proceso es *no homogéneo* (Fuentes-Santos et al., 2016).

2.2.1. Estimación de la función de intensidad

Para la estimación de la función de intensidad, Fuentes-Santos et al. (2016) proponen una alternativa no paramétrica mediante el estimador kernel dado por

$$\hat{\lambda}_H(x) = p_H(x)^{-1} \sum_{i=1}^N k_H(x - x_i) = p_H(x)^{-1} |H|^{-1/2} \sum_{i=1}^N k(H^{-1/2}(x - x_i)), \quad (2.2)$$

donde $k(\cdot)$ es una función de densidad de probabilidad radialmente simétrica, $H > 0$ es una matriz simétrica y definida positiva que determina el suavizamiento del kernel- también llamada *matriz de ancho de banda*-, y $|H|$ es el determinante de H . $p_H(x) = \int_W |H|^{-1/2} k(H^{-1/2}(x - y)) dy$ representa el término de corrección en el borde, el cual corrige el posible sesgo debido a la restricción del dominio observado con respecto al plano, y asegura la consistencia del estimador de densidad

por kernel (Zheng, 2004).

La elección de la función $k(\cdot)$ no es decisiva en tanto cumpla con los requisitos enunciados. En este trabajo, utilizaremos la función de densidad de la distribución normal estándar bivariada $k(x) = (2\pi)^{-1} \exp(-\frac{1}{2}x^T x)$. Luego, $k_H(x - x_i)$ es la densidad de una distribución normal $N(x_i, H)$, $i = 1, \dots, N$. En contraste, la elección de la matriz H es crucial en el desempeño del estimador $\hat{\lambda}_H(\cdot)$ (Wand and Jones, 1994). Esta elección depende tanto del tipo de parametrización a utilizar como del método de selección de la matriz.

Un supuesto adicional necesario para establecer la consistencia del estimador (2.2) es asumir que el proceso puntual $\mathbf{X}$ es un proceso Poisson (Diggle, 2013). Esto implica adoptar los siguientes supuestos:

- El número esperado de puntos en la región acotada W es dado por $\int_W \lambda(u) du$, donde $\lambda(\cdot)$ es dado por (2.1).
- La información acerca del patrón puntual en un subconjunto $W_1 \subset W$ no influye en la realización de otro subconjunto $W_2 \subset W$, con $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.
- La probabilidad de que una región infinitesimal dx tenga más de un evento es despreciable.¹

La adopción de los supuestos anteriores implica suponer, entonces, que el número de eventos de una realización del proceso puntual N en una región $W \subset \mathbb{R}^2$ es una variable aleatoria con distribución $Poisson(\int_W \lambda(u) du)$. Además, condicional a N , Cucala (2006) estableció la siguiente relación entre la intensidad de un proceso puntual y una función de densidad bivariada:

$$\lambda_0(x) = \frac{\lambda(x)}{\int_W \lambda(u) du} = \frac{\lambda(x)}{m}, \quad (2.3)$$

que representa la función de densidad de probabilidad de las ubicaciones de los eventos en la región W .

Sin embargo, tal como mencionan Fuentes-Santos et al. (2016), en la práctica no es posible distinguir en un patrón puntual entre heterogeneidad del proceso puntual e *interacción* entre eventos, a menos que se cuente con información adicional. Luego, una práctica habitual en el análisis de patrones puntuales es suponer que el proceso puntual es un proceso Poisson, estimar su intensidad de primer orden, y después estimar sus propiedades de segundo orden con el objetivo de contrastar la hipótesis distribucional.

¹Notemos que de esta condición, $\lambda(x)|dx|$ puede ser interpretado como la probabilidad de que dx contenga exactamente un evento.

2.2.2. Selección del parámetro ancho de banda

Los métodos de selección de ancho de banda buscan seleccionar un nivel *óptimo* de suavizamiento en la estimación de densidad por kernel, con los datos disponibles. El qué se entiende por un parámetro óptimo, y como seleccionarlo, es un problema que depende fuertemente del propósito con el cual se realiza la estimación (Silverman, 1998). Pero en general, a un menor valor del parámetro ancho de banda, menor será el suavizamiento de la estimación y la curva (o superficie) será mas irregular; en cambio un valor mayor de ancho de banda suavizará en mayor medida la densidad estimada, con la potencial pérdida de información que ello implica (Jones et al., 1996).

En el caso de una dimensión ($d = 1$), el estimador kernel requiere un valor de ancho de banda h único, y los métodos para la selección de este parámetro han sido estudiados ampliamente (Rudemo, 1982; Sheather and Jones, 1991; Silverman, 1978). En cuanto a los métodos de selección del parámetro de suavizamiento en dimensiones mayores, existen métodos que extienden aquellos que han demostrado ser eficaces para el caso univariado, en un contexto multivariado (Duong and Hazelton, 2005; Sain et al., 1994; Scott, 1985).

Para el caso bidimensional ($d = 2$), la parametrización más básica consiste en un valor ancho de banda único $H = h^2 I_2$, $h > 0$. Con esta parametrización, denominada *parametrización única*, la masa del kernel es esféricamente simétrica alrededor de los puntos, con contornos de probabilidad circulares. Al añadir un parámetro adicional a la matriz ancho de banda, $H = \text{diag}(h_1^2, h_2^2)$, $h_1, h_2 > 0$, los contornos de probabilidad alrededor de las observaciones son elípticos, con los ejes de la elipse paralelos a los ejes coordenados. La parametrización aplicada en este caso se denomina *parametrización diagonal*. Por último, si

$$H = \begin{pmatrix} h_1^2 & h_{12} \\ h_{21} & h_2^2 \end{pmatrix},$$

$h_1, h_2 > 0$, $h_{12} = h_{21}$, $|h_{12}| < h_1 h_2$, la forma de los contornos sigue siendo elíptica, pero con orientación arbitraria (figura 2.1). Al parámetro obtenido mediante esta matriz se le conoce como *matriz ancho de banda llena*.

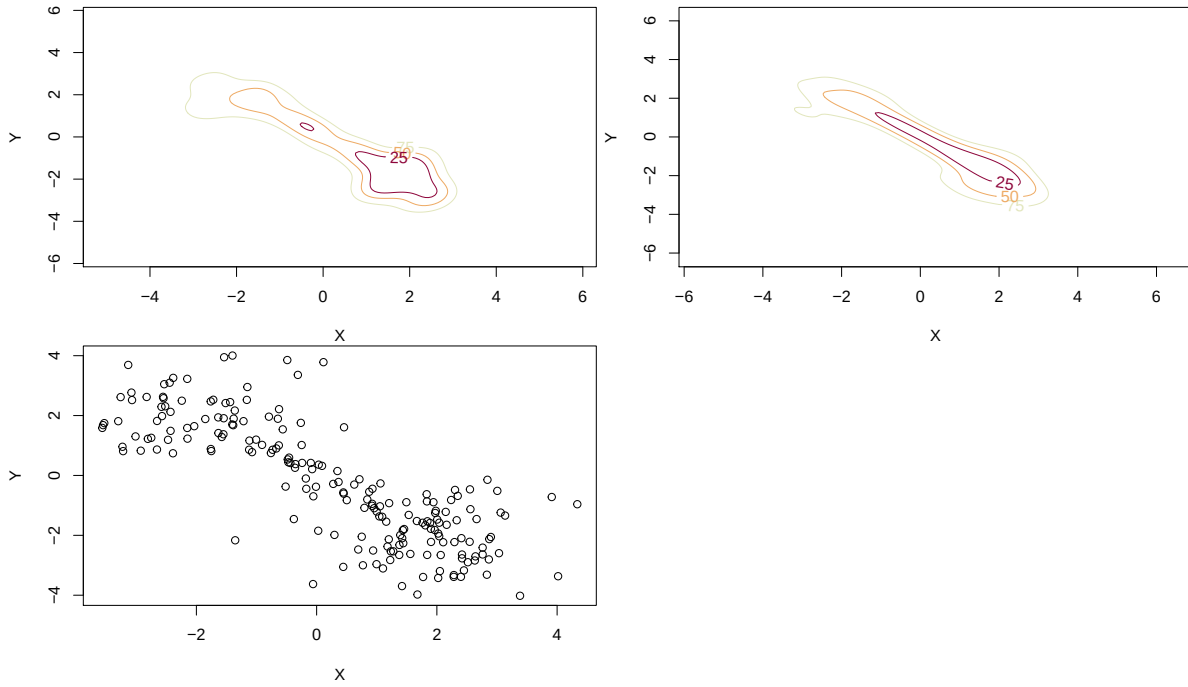


Figura 2.1: En la figura de arriba a la izquierda, se ubica la densidad estimada mediante una parametrización diagonal del parámetro ancho de banda. En la figura de arriba a la derecha, el parámetro de ancho de banda utilizado en la función kernel es una matriz llena. En ambos casos, los datos son generados a partir de una mixtura de normales bivariadas (figura de abajo).

Una de las medidas de discrepancia más utilizadas para cuantificar el desempeño de un estimador kernel es el *Error Cuadrático Medio Integrado* (ECMI)

$$\begin{aligned}
 ECMI(H) &= \mathbb{E} \left[\int_W (\hat{\lambda}_{0,H}(x) - \lambda_{0,H}(x))^2 dx \right] \\
 &= \int_W \mathbb{E} [(\hat{\lambda}_{0,H}(x) - \lambda_{0,H}(x))^2] dx \\
 &= \int_W \mathbb{E} [\hat{\lambda}_{0,H}(x)^2] dx - 2 \int_W \mathbb{E} [\hat{\lambda}_{0,H}(x) \lambda(x)] dx + \int_W \lambda(x)^2 dx
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\tag{2.5}$$

Luego, considerando el ECMI como criterio de optimalidad del estimador kernel, el parámetro ancho de banda óptimo quedará dado por

$$H_{ECMI} = \underset{H \in \mathcal{F}_2}{\operatorname{argmin}} ECMI(H) , \tag{2.6}$$

donde $\mathcal{F}_2$ es el conjunto de todas las matrices simétricas definidas positivas de dimensión 2×2 (Chacón and Duong, 2010).

Nótese que en la parte derecha de 2.4, sólo los dos primeros términos dependen de H . Luego, para minimizar el ECMI, se debe encontrar un H tal que minimice la cantidad $ECMI(H) - \int_W \lambda(x)^2 dx$. Así, si $N = n$, la función anterior puede ser estimada a partir del patrón puntual x por

$$LSCV(H) = \int_W \hat{\lambda}_{0,H}(x)^2 dx - 2n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_{0,H}(x)^{-i}, \quad (2.7)$$

donde $\hat{\lambda}_{0,H}(\cdot)^{-i} = (n-1)^{-1} p_H(x)^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N k_H(x - x_j)$ es el estimador *leave one out* de $\lambda_0(\cdot)$, que ignora el evento i -ésimo del patrón puntual x en la estimación, y $H = h^2 I$ parametrizado mediante un escalar h . El método selector del parámetro h basado en el estimador $LSCV$ es conocido como *Least squares cross-validation* (Wand and Jones, 1994). Luego, el ancho de banda seleccionado mediante el método $LSCV$ es dada por

$$\hat{H}_{LSCV} = \underset{h \in \mathcal{F}_2}{\operatorname{argmin}} LSCV(H). \quad (2.8)$$

El desempeño del estimador (2.7) para el caso de datos espaciales, especialmente para conjuntos de eventos heterogéneamente distribuidos, no es óptimo, y adolece de alta variabilidad (Davies et al., 2018). Además, la versión anterior del selector $LSCV$ limita la parametrización de H a ser única, lo cual implica la pérdida de influencia de eventos cuya dirección no es paralela a los ejes coordenados en la estimación y restringe el suavizamiento. Sin embargo, Duong y Hazelton (2005) proponen un método para la estimación de matrices diagonales y llenas mediante este selector.

Por otro lado, es común encontrar una aproximación del ECMI, la cual es denominada *Error Cuadrático Medio Integrado Asintótico* (ECMIA), y seleccionar $\hat{H}$ tal que

$$\hat{H}_{ECMIA} = \underset{H \in \mathcal{F}_2}{\operatorname{argmin}} ECMIA(H). \quad (2.9)$$

Los métodos basados en encontrar $\hat{H}$ basados en el ECMIA se conocen como selectores *plug-in*. Duong y Hazelton (2003) demostraron que, bajo las siguientes condiciones:

C.1) $\lambda_0(\cdot)$ tiene derivadas parciales hasta orden 4, y todas sus derivadas parciales de segundo y cuarto orden son acotadas, continuas y cuadrado integrables;

C.2) La matriz ancho de banda H seleccionada es simétrica, definida positiva, y además $H \rightarrow 0$ y $m^{-1}|H|^{-1/2} \rightarrow 0$ si $m \rightarrow +\infty$;

C.3) La función kernel $k(\cdot)$ es una función de densidad continua, radialmente simétrica y

cuadrado integrable, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} uu^T k(u) du = \mu_2(k) I_2, \text{ con } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \mu_2(k) < +\infty, \quad (2.10)$$

entonces se cumple que

$$ECMIA(H) = \frac{1}{4} \mu_2(k)^2 (\text{vech}^T H) \Psi_4 (\text{vech } H) + A(m) |H|^{-1/2} R(k), \quad (2.11)$$

donde $\text{vech } H$ es el vector que contiene todos los elementos de H menos su triangular superior (apilados de arriba hacia abajo e izquierda a derecha), $R(k) = \int_{\mathbb{R}^2} k(x)^2 dx$ y $A(m) = \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} I[N > 0] \right]$. Ψ_4 es la matriz 3×3 dada por

$$\Psi_4 = \int_{\mathbb{R}^2} \text{vech} \left[2D^2 \lambda_0(x) - \text{diag}(D^2 \lambda_0(x)) \right] \text{vech}^T \left[2D^2 \lambda_0(x) - \text{diag}(D^2 \lambda_0(x)) \right] dx, \quad (2.12)$$

con $D^2 \lambda_0$ la matriz *hessiana* de λ_0 . Los elementos individuales de Ψ_4 pueden expresarse en términos de las derivadas integradas de la función de densidad

$$\psi_{\mathbf{r}} = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_0(x)^{(\mathbf{r})} \lambda_0(x) dx = \mathbb{E}[\lambda_0(x)^{(\mathbf{r})}], \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, $|\mathbf{r}| = r_1 + r_2$ y

$$\lambda_0(x)^{(\mathbf{r})} = \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} \lambda_0(x)}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2}}. \quad (2.14)$$

En particular,

$$\Psi_4 = \begin{pmatrix} \psi_{40} & 2\psi_{31} & \psi_{22} \\ 2\psi_{31} & 4\psi_{22} & 2\psi_{13} \\ \psi_{22} & 2\psi_{13} & \psi_{04} \end{pmatrix}.$$

Ya que H no tiene una forma cerrada en (2.11), la única forma de encontrarlo es mediante métodos numéricos, como el algoritmo *Newton-Raphson* (Wand, 1992). Nótese además, que para determinar (2.12), se debe conocer Ψ_4 , lo cual implicar la estimación de las funcionales ψ_4 (estimaciones *piloto*). Duong y Hazelton (2003) proponen un algoritmo que selecciona el ancho de banda óptimo, a través de la utilización de una matriz ancho de banda piloto $G = g^2 I$.

2.2.3. Test de similaridad entre dos procesos puntuales

A partir de la relación (2.3) y el estimador (2.2), Duong et al. (2012) proponen un test de similaridad entre dos patrones puntuales observados, a través de la comparación de las densidades en los sitios de los eventos. Así, sean dos procesos puntuales $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$, y considerando como hipótesis nula $\mathcal{H}_0 : \lambda_{01}(x) = \lambda_{02}(x) = \lambda_0(x)$, donde $\lambda_{0i}(x) = \frac{\lambda_i(x)}{m_i}$; Duong et al. (2012) proponen el estadístico de contraste

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \int_W (\hat{\lambda}_{01}(x) - \hat{\lambda}_{02}(x))^2 dx \\ &= \int_W \hat{\lambda}_{01}(x)^2 dx + \int_W \hat{\lambda}_{02}(x)^2 dx - \int_W \hat{\lambda}_{01}(x)\hat{\lambda}_{02}(x)dx - \int_W \hat{\lambda}_{02}(x)\hat{\lambda}_{01}(x)dx \\ &= \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2 - (\hat{\psi}_{12} + \hat{\psi}_{21}) ,\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde $\hat{\psi}_{ij}$ y $\hat{\psi}_i$ son estimadores de $\psi_i = \mathbb{E}_{\mathbf{X}_i}(\lambda_{0i})$, y $\hat{\psi}_{ij} = \mathbb{E}_{\mathbf{X}_i}(\lambda_{0j})$, dados por

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_i &= N_i^{-2} \sum_{l_1=1}^{N_i} \sum_{l_2=1}^{N_i} k_{H_i}(x_{l_1} - x_{l_2}) I(N_i > 0) \\ \hat{\psi}_{ij} &= (N_i N_j)^{-1} \sum_{l_1=1}^{N_i} \sum_{l_2=N_i+1}^N k_{H_i}(x_{l_1} - x_{l_2}) I(N_i > 0) I(N_j > 0) , \quad i, j = 1, 2 .\end{aligned}\tag{2.16}$$

Suponiendo los patrones observados $\mathbf{x}_1 = \{x_{1,1}, \dots, x_{1,N_1}\}$ y $\mathbf{x}_2 = \{x_{2,1}, \dots, x_{2,N_2}\}$, con $N = N_1 + N_2$, los cuales son consideradas muestras aleatorias a partir de las densidades λ_{01} y λ_{02} , respectivamente. Duong et al. (2012) demostraron que bajo las condiciones C.1) a C.3) para $\lambda_{0j}(\cdot)$, $j = 1, 2$, y bajo el supuesto de la hipótesis nula $\mathcal{H}_0$, $\frac{\hat{T} - \mu_{\hat{T}}}{\sigma_{\hat{T}}} \sim N(0, 1)$, donde

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{T}} &= \mathbb{E}\hat{T} = (A(m_1)|H_1|^{-1/2} + A(m_2)|H_2|^{-1/2})k(0) \\ \sigma_{\hat{T}} &= Var\hat{T} = 3(A(m_1) + A(m_2)) \int (\lambda_0^3(x)dx - \psi^2)(1 + o(1)) ,\end{aligned}\tag{2.17}$$

donde H_1 y H_2 las matrices ancho de banda *plug-in* de los patrones puntuales $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ respectivamente, y $\psi = \int \lambda_0^2(x)dx$.

Sin embargo, la calibración del test mediante el resultado asintótico anterior genera niveles de significancia que no necesariamente corresponden a los niveles nominales, especialmente para patrones puntuales pequeños. Debido a ello, Fuentes-Santos et al. (2017) proponen un algoritmo *bootstrap* para calibrar el test de similaridad entre dos patrones puntuales, el cual se basa en generar sucesivas muestras de $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, bajo el supuesto de la hipótesis $\mathcal{H}_0$, y calcular para cada una de ellas el estadístico $\hat{T}$.

Sean dos patrones puntuales observados $\mathbf{x}_1 = \{x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}\}$ y $\mathbf{x}_2 = \{x_{2,1}, \dots, x_{2,n_2}\}$, con $N = n = n_1 + n_2$.

1. Calcular el estadístico $\hat{T}$ para los patrones puntuales $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.
2. Sea $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ la realización completa del proceso puntual, incluyendo los dos patrones observados. Obtener $\hat{\lambda}_{0,H}(x)$ a partir de (2.2).
3. Para $b = 1, \dots, B$:
 1. Generar una realización de un proceso puntual *Poisson* bivariado $\mathbf{x}_b = \{x_{1,b}^*, x_{2,b}^*\}$, donde $x_{j,b}^*$ es una realización de un proceso puntual espacial *Poisson* no homogéneo con intensidad $n_j \hat{\lambda}_{0,j}$, $j = 1, 2$.
 2. Calcular el estadístico $\hat{T}_b^*$ para los patrones puntuales $\mathbf{x}_{1,b}^*$ y $\mathbf{x}_{2,b}^*$.
4. Dado un nivel de significancia α , el punto crítico $\hat{T}_{1-\alpha}^*$ es dado por el percentil $100(1 - \alpha)$ del vector de valores $\hat{T}_b^*$ ordenados. Luego, se rechaza $\mathcal{H}_0$ si $\hat{T} > \hat{T}_{1-\alpha}^*$.

2.2.4. Riesgo relativo espacial

Una herramienta útil en el análisis exploratorio de patrones puntuales es la función de riesgo relativo. Introducida originalmente por Bithell (1990) para describir la variabilidad espacial en la incidencia de enfermedades entre grupos de infectados y grupos control, desde entonces la estimación de esta función ha sido utilizada para responder preguntas en un amplio abanico de disciplinas; desde la epidemiología veterinaria (Campos and Fedigan, 2014), arqueología (Smith et al., 2015), anatomía (Davies et al., 2013), entre otros. Con el objetivo de detectar diferencias en la variabilidad espacial entre un grupo de eventos *tratamiento* y un grupo de eventos *control*, se

define la función riesgo relativo:

$$r(x) = \frac{\lambda_{01}(x)}{\lambda_{02}(x)} . \quad (2.18)$$

Como señalan Kelsall et al. (1995), típicamente lo que se busca estimar es el logaritmo de la función (2.18):

$$\rho(x) := \log(r(x)) = \log\{\lambda_{01}(x)\} - \log\{\lambda_{02}(x)\} . \quad (2.19)$$

En adelante, consideraremos como grupos tratamiento y control los eventos de robos con uso y sin uso de armas, respectivamente. Luego, valores $\rho \approx 0$ sugerirán una homogeneidad entre las distribuciones de densidad de los robos con armas y sin armas, λ_{01} y λ_{02} respectivamente; sitios con valores *peak* $\rho > 0$ indicarán una mayor concentración de la presencia de armas en los robos denunciados, en tanto zonas donde $\rho < 0$ sugerirán una concentración inusualmente baja de delitos con arma como medio de coerción en un robo.

La estimación de una matriz ancho de banda *fija* usual presenta limitaciones en el caso de distribuciones espaciales altamente heterogéneas. En estos casos, los métodos de selección de la matriz H vistos anteriormente fallan en proveer niveles de suavizamiento suficiente en zonas con alta concentración de eventos y zonas con baja densidad de eventos simultáneamente. El problema que se presenta es análogo al caso de la estimación de densidad univariada para distribuciones fuertemente sesgadas; ya que el parámetro ancho de banda - o *ventana* para el caso univariado - es fijo a lo largo de la muestra, existirá una tendencia de la curva estimada a *exagerar* la variabilidad en las colas - *sub-suavizamiento* -, y si para remediar esto se ajusta la estimación, se *sobre-suavizará* la mayor parte de la distribución, escondiendo patrones en los datos que sí pueden ser relevantes (Silverman, 1998).

Para remediar este problema, existen métodos de estimación de densidad por kernel llamados *adaptativos* (Abramson, 1982; Breiman et al., 1977), los cuales ajustan automáticamente la cantidad de suavizamiento a lo largo de la región de interés, seleccionando valores de ancho de banda mas grandes en áreas donde los datos se ubican de manera dispersa, y valores más pequeños en zonas donde la cantidad de puntos es abundante (Davies et al., 2016). Se ha demostrado que estos métodos presentan ciertas ventajas, teóricas y prácticas, con respecto a métodos de estimación de ancho de banda fijos (Davies and Hazelton, 2010).

El estimador de densidad por kernel adaptativo es dado por

$$\hat{\lambda}_{0j,h(x)} = q_h^{-1}(x) \sum_i^{N_j} k_{h_i}(x - X_i) = q_h(x)^{-1} \sum_i^{N_j} h(x_i)^{-2} k(h(x_i)^{-1}(x - X_i)) , j = 1, 2 , \quad (2.20)$$

donde $q_h(x) = \int_W h(x)^{-2} k(h(x)^{-1}(x - y)) K dy$ es el factor de corrección en el borde en el caso del estimador adaptativo. Notemos que la principal diferencia de (2.20) con respecto a (2.2) es que el ancho de banda es ahora *función* de las coordenadas del punto. Los parámetros estimados $h_1, \dots, h_{N_j}$, $j = 1, 2$ son denominados también ancho de banda locales.

Una metodología ampliamente utilizada para la selección de los parámetros ancho de banda locales es la propuesta por Abramson (1982). Se definen los ancho de banda locales como

$$h_i = h(x_i) = h_0 \alpha(x_i) = h_0 \left(\frac{1}{\gamma \lambda_{0j}(x_i)^{1/2}} \right) \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.21)$$

donde

$$\gamma = \exp \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_j} \log(\lambda_{0j}(x_i)^{1/2}) \right\}, j = 1, 2, \quad (2.22)$$

y h_0 es el parámetro ancho de banda *global*, obtenido por alguno de los métodos de selección vistos en la sección 2.2.2. De (2.21), se puede ver que los anchos de banda locales son inversamente proporcionales a la raíz cuadrada de la densidad en los puntos observados. Como λ_{0j} son desconocidos, deben ser reemplazados por estimaciones, las cuales pueden ser obtenidas a partir de las fórmulas (2.2) y (2.3) conocidas. Sea $\tilde{\lambda}_{0j}$ la estimación *piloto*, obtenida a partir de un método de selección de ancho de banda fijo, con $\tilde{h}$ el ancho banda seleccionado. Luego, reemplazando $\tilde{\lambda}_{0j}$ por λ_{0j} en (2.21) y (2.22), e introduciendo en (2.20) los parámetros locales h_i calculados, se obtienen densidades estimadas que consideran la heterogeneidad espacial.

El estimador del log-riesgo relativo es dado por

$$\hat{\rho}(x) = \log \left(\frac{\hat{\lambda}_{01,h(x)}(x)}{\hat{\lambda}_{02,h(x)}(x)} \right) = \log \{ \hat{\lambda}_{01,h(x)}(x) \} - \log \{ \hat{\lambda}_{02,h(x)}(x) \}. \quad (2.23)$$

De seguir el método anterior para estimar las densidades de ambos procesos puntuales, se deben calcular las densidades piloto $\tilde{\lambda}_{01}$, $\tilde{\lambda}_{02}$ para cada muestra de los procesos puntuales generadores $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, donde $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{X}_2$. Pero esto involucra calcular dos anchos de banda pilotos $\tilde{h}_1$ y $\tilde{h}_2$ a partir de cada una de las muestras, lo cual implica que, a menos que $\lambda_{01}(x) = \lambda_{02}(x)$, $\forall x \in W$, los ancho de banda locales para cada uno de los puntos serán distintos. Luego, al estimador de la función log-riesgo relativo obtenido a partir de este método se le conoce como estimador log-riesgo adaptativo *asimétrico*. Una alternativa a esta práctica consiste en utilizar el mismo ancho de banda piloto $\tilde{h}_0$ calculado a partir del conjunto de *ambas* muestras; luego las densidades pilotos calculadas son equivalentes ($\tilde{\lambda}_{01} = \tilde{\lambda}_{02} = \tilde{\lambda}_0$). Al estimador del log-riesgo relativo obtenido a partir de este

esquema se le llama estimador log-riesgo adaptativo *simétrico*.

2.2.5. Inferencia respecto del riesgo relativo

Una pregunta natural con respecto al log-riesgo relativo estimado es si éste es lo suficientemente distinto de cero en un sitio dado; es decir, si la diferencia entre las densidades estimadas a partir de los patrones observados es estadísticamente significativa. Así, sea un $x \in W$ fijo, se formulan las hipótesis²

$$\mathcal{H}_0 : \rho(x) = 0$$

$$\mathcal{H}_1 : \rho(x) > 0 .$$

El resultado de este contraste de hipótesis es una superficie de valores- p , de la cual aparecen regiones cuyo riesgo espacial relativo es estadísticamente significativo, cuyas fronteras se denominan *contornos de tolerancia*.

Una manera de realizar inferencia con respecto a la función riesgo espacial relativo es mediante realizaciones sucesivas del log-riesgo relativo estimado vía simulaciones Monte Carlo (Kelsall et al., 1995). Así, sea $\hat{\rho}(\cdot)$ el estimador adaptativo simétrico del log-riesgo relativo, Davies et al. (2018) sugieren el siguiente algoritmo:

1. Sea $x = \{x_1, x_2\}$ la realización completa del proceso puntual, incluyendo los dos patrones observados. Obtener $\hat{\rho}_{\tilde{h}_0}(\cdot)$ a partir de (2.23), con $\tilde{h}_0$ el ancho de banda piloto.
2. Para $b = 1, \dots, B$:
 1. Realizar un muestreo aleatorio sin reemplazo de n_1 puntos del patrón puntual completo x , que representarán el conjunto de eventos *tratamiento* simulado $x_1^{(b)}$. Los n_2 puntos restantes del patrón puntual constituirán los eventos *control* $x_2^{(b)}$.
 2. Calcular $\hat{\rho}_{\tilde{h}_0}(\cdot)$ a partir de los patrones puntuales $x_1^{(b)}$ y $x_2^{(b)}$.
3. La superficie de valores- p es la proporción de los B log-riesgos relativos simulados que exceden el log-riesgo relativo observado en cada sitio del patrón puntual $x \in W$; la cual es expresada por la función

²Análogamente, la hipótesis alternativa podría ser $\mathcal{H}_1 : \rho(x) < 0$, sin embargo es más común en aplicaciones indagar acerca del riesgo espacial en exceso.

$$P(x) = (B + 1)^{-1} \left\{ 1 + \sum_{b=1}^B 1[\hat{\rho}_{\tilde{h}_0}(x|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq \hat{\rho}_{\tilde{h}_0}(x|\mathbf{x}_1^{(b)}, \mathbf{x}_2^{(b)})] \right\}, x \in W. \quad (2.24)$$

2.3. Procesos Puntuales Espacio Temporales

Un proceso puntual espacio temporal $\mathbf{X}_{et}$ describe la distribución de la ubicación y los tiempos de ocurrencia de un conjunto de eventos observados $\{(x_1, t_1), \dots, (x_N, t_N)\}$, los cuales están irregularmente dispuestos en $W \times T \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ (Fuentes-Santos et al., 2018). Por lo tanto, cada evento de un patrón puntual resultante estará representado por las dos coordenadas espaciales $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2})$, y una coordenada temporal t_i .

Al igual que en un proceso puntual espacial, una de las maneras de describir un proceso puntual espacio temporal es a través de su función de intensidad de primer orden (Diggle, 2013)

$$\lambda(x, t) = \lim_{|dx \times dt| \rightarrow 0} \frac{E[N(dx, dt)]}{|dx \times dt|}, \quad (2.25)$$

donde $N(dx, dt)$ representa el número de eventos ocurridos dentro del volumen $dx \times dt$, con dt un intervalo infinitesimal de tiempo conteniendo t . Esta función es una extensión natural del caso puramente espacial, definido en (2.1).

A partir de la función (2.25), se pueden definir las funciones de intensidad *marginales* espacial y temporal, definidas por

$$\lambda_1(x) = \int_T \lambda(x, t) dt, \quad \lambda_2(x) = \int_W \lambda(x, t) dx, \quad (2.26)$$

respectivamente.

Así también, la función de intensidad espacio temporal *condicional* (FIC) se define como

$$\lambda(x, t|\mathbf{S}_t) = \lim_{|dx \times dt| \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N(dx, dt)|\mathbf{S}_t]}{|dx \times dt|}, \quad (2.27)$$

donde $\mathbf{S}_t = \{(x_i, t_i) : t_i < t\}$. Esto es, la FIC representa la intensidad espacial de primer orden del proceso *hasta* el tiempo t , y caracteriza únicamente a un proceso puntual *ordenado* (Fuentes-Santos et al., 2018). En particular, un proceso puntual Poisson espacio temporal puede ser definido como un proceso puntual ordenado si $\lambda(x, t|\mathbf{S}_t) = \lambda(x, t)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$.

2.3.1. Estimación de la función de intensidad espacio temporal

El estimador de la función de intensidad espacio temporal es dado por

$$\hat{\lambda}_{H_e, h_t}(x, t) = p_{H_e, h_t}(x, t)^{-1} |H_e|^{-1/2} h_t^{-1} \sum_i^N k_{e, H_e}(H_e^{-1/2}(x - \mathbf{x}_i)) k_{t, h_t}(h_t^{-1/2}(t - t_i)) , \quad (2.28)$$

donde k_{e, H_e} y k_{t, h_t} son las funciones kernel bivariada y univariada, respectivamente, H_e es la matriz ancho de banda para el componente espacial, y h_t es el ancho de banda para el componente temporal de $\mathbf{X}_{et}$ (Fuentes-Santos et al., 2018). El factor de corrección en el borde para el caso espacio temporal es dado por $p_{H_e, h_t}(x, t) = \int_T \int_W k_{e, H_e}(x - u) k_{t, h_t}(t - v) du dv = (\int_W k_{e, H_e}(x - u) du) (\int_T k_{t, h_t}(t - v) dv)$.

2.3.2. Separabilidad del Proceso Puntual espacio temporal

Un proceso puntual espacio temporal $\mathbf{X}_{et}$ es *separable* si

$$\lambda(x, t) = \lambda_1(x) \lambda_2(t), \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ , \quad (2.29)$$

donde $\lambda_1(\cdot)$, $\lambda_2(\cdot)$ son procesos puntuales. El supuesto de separabilidad es bastante restrictivo; por ejemplo, suponer un modelo separable para describir robos ocurridos en una región y durante un intervalo de tiempo dado implica asumir que la distribución espacial del riesgo de violencia en los robos no varía en el tiempo. Por lo tanto, el contraste de la hipótesis de separabilidad debe ser uno de los primeros pasos en el análisis de un patrón puntual espacio temporal (Fuentes-Santos et al., 2018).

Para contrastar la hipótesis de separabilidad en un proceso puntual espacio temporal, se han propuesto diferentes métodos (Díaz-Avalos et al., 2013; Fuentes-Santos et al., 2018; Schoenberg, 2004). En particular, Ghorbani et al. (2021) proponen el estadístico de contraste

$$S(x, t) = \frac{\hat{\lambda}(x, t)}{\hat{\lambda}_1(x) \hat{\lambda}_2(t) / m} , (x, t) \in W \times T , \quad (2.30)$$

donde el numerador de (2.30) es el estimador de la intensidad (2.28). Ya que el estadístico S no tiene una distribución conocida, la opción natural es realizar el test a partir de simulaciones Monte Carlo.

Bajo el supuesto de separabilidad del proceso puntual espacio temporal, el comportamiento

del estadístico S debiera ser homogéneo ante permutaciones entre las coordenadas de los eventos y sus *marcas* de tiempo. Más aún, suponiendo que el proceso generador en un modelo espacio temporal Poisson no homogéneo, se cumple la propiedad de *invarianza ante permutaciones* (Diggle, 2013). Luego, las simulaciones a obtener bajo la hipótesis nula pueden consistir en permutaciones aleatorias entre x_i , manteniendo t_j fijo, o fijando x_i pareado con t_j aleatoriamente. Así, si la hipótesis de separabilidad es verdadera, los nuevos pares de coordenadas y tiempos (x_i, t_i) a partir de permutaciones aleatorias sucesivas son estadísticamente equivalentes (Ghorbani et al., 2021).

2.4. Dependencia en Patrones Puntuales Espaciales

2.4.1. La función K

En el análisis de patrones puntuales, uno de los objetivos principales es caracterizar la dependencia entre los puntos o *interacción*. Si un proceso puntual es estacionario - es decir, las propiedades de $\mathbf{X} + v$ son las mismas que las del proceso puntual original $\mathbf{X}^3$ -, la interacción se puede cuantificar a través de la función K (Ripley, 1977), dada por

$$K(r) = \lambda^{-1} \mathbb{E}[N_0(r)] , \quad (2.31)$$

donde $N_0(r)$ es el número de eventos ubicados a una distancia menor o igual a r de un evento arbitrario.

Diggle (2013) define la función de intensidad *de segundo orden* como

$$\lambda_2(x, y) = \lim_{|dx|, |dy| \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N(dx)N(dy)]}{|dx||dy|} . \quad (2.32)$$

A partir de (2.32), se define la función de intensidad *condicional* como $\lambda_c(x|y) = \lambda_2(x, y)/\lambda(y)$, la cual representa la intensidad en el punto x dado que se conoce la existencia de un evento en y . Para el caso de un proceso puntual espacial estacionario, se cumple que $\lambda_2(x, y) = \lambda_2(x - y)$. Un supuesto adicional es el establecer que $\lambda_2(x, y)$ depende de $\|x - y\|$; esto es, que el proceso puntual en cuestión es invariante ante rotaciones. En tal caso se dice que el proceso puntual es *isotrópico*.

Baddeley et al. (2000) definen como un proceso puntual estacionario *de segundo orden* (o

³El supuesto de estacionariedad del proceso puntual es análogo a la homogeneidad del proceso Poisson.

intensidad-ponderado) cuando

$$g(r) = \frac{\lambda_2(x, y)}{\lambda(x)\lambda(y)} \quad (2.33)$$

depende sólo de $r = \|x - y\|$, donde $g(\cdot)$ se le denomina *función de correlación a pares*. Un ejemplo de un proceso puntual intensidad-ponderado es un proceso espacial Poisson no homogéneo, en el cual la intensidad varía en el espacio, mientras que la variabilidad alrededor de ella es estacionaria (Diggle, 2013).

Si $\mathbf{X}$ es un proceso puntual Poisson no homogéneo, se define la función K no homogénea de $\mathbf{X}$ como

$$K_{nohom}(r) = |W|^{-1} \mathbb{E} \sum_{x_i \in \mathbf{X} \cap W} \sum_{x_j \in \mathbf{X} \setminus \{x_i\}} \frac{1(\|x_i - x_j\| \leq r)}{\lambda(x_i)\lambda(x_j)}, \quad r \geq 0, \quad (2.34)$$

donde $|W| > 0$, con $|W|$ el área de W , y $1(\cdot)$ denota la función indicadora, donde

$$1(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x_i - x_j\| \leq r \\ 0 & \text{si } \|x_i - x_j\| > r. \end{cases}$$

La función K no homogénea es una generalización de la función K usual; si $\lambda(x) \equiv \lambda$, (2.34) y (2.31) son iguales.

Si el análisis inicial sugiere que el proceso puntual es del tipo Poisson no homogéneo, entonces se puede utilizar el estimador puntualmente insesgado propuesto por Baddeley et al. (2000)

$$\hat{K}_{nohom}(r) = |W|^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{1(\|x_i - x_j\| \leq r)}{\hat{\lambda}(x_i)\hat{\lambda}(x_j)} \omega_{ij}^{-1}, \quad 0 \leq r \leq r_{max}, \quad (2.35)$$

donde r_{max} es la distancia máxima entre eventos en la cual es evaluada la función, ω_{ij} es el factor de corrección en el borde propuesto por Ripley (1976), y $\hat{\lambda}(\cdot)$ es el estimador de la intensidad por kernel (2.2).

Una transformación de la función K usada comúnmente es la función L (Besag, 1977), dada por

$$L_{nohom}(r) = \sqrt{\frac{K_{nohom}(r)}{\pi}}, \quad (2.36)$$

que transforma la función K teórica Poisson $K_{nohom}(r) = \pi r^2$ a una función lineal $L_{nohom}(r) = r$. Valores menores a r reflejarán una conducta inhibitoria entre los eventos del proceso puntual, en tanto valores mayores a r indicarán un comportamiento análogo al agrupamiento entre los eventos.

Esta transformación facilita la inspección visual del comportamiento de dependencia en el patrón puntual en estudio, además de estabilizar la varianza del estimador (Baddeley et al., 2015).

2.4.2. Test de hipótesis de AEC a partir de la función K

El suponer la hipótesis de Aleatoriedad Espacial Completa (AEC) del proceso puntual espacial es análogo al supuesto de que el proceso puntual es Poisson no homogéneo. Bajo esta hipótesis, $K_{nohom,0}(r) = \pi r^2$ (por ende $L_{nohom,0}(r) = r$), y la región de aceptación está centrada alrededor de este valor, en donde se encuentran todos los valores $\hat{K}_{nohom}(r)$ no significativamente diferentes de πr^2 . Luego, para un valor de r fijo, el contraste de hipótesis rechazará la hipótesis de AEC si $\hat{K}_{nohom}(r)$ se encuentra fuera de la región de aceptación.

La distribución de $\hat{K}_{nohom}(r)$ es indeterminable analíticamente en el caso de un proceso Poisson no homogéneo (Diggle, 2013). Es por ello que el contraste de hipótesis de AEC es usualmente realizado mediante tests de *Monte Carlo*, basados en la simulación sucesiva de patrones puntuales bajo la hipótesis nula (AEC) (Besag and Diggle, 1977; Ripley, 1979, 1977). Estos patrones puntuales son realizaciones de un proceso puntual Poisson no homogéneo con la función de intensidad estimada por (2.2). Sean B el número de realizaciones y $x_1^*, \dots, x_B^*$ los patrones simulados, entonces de éstas realizaciones independientes se obtienen las funciones K estimadas por (2.35), obteniendo $\hat{K}_{nohom,1}(r), \dots, \hat{K}_{nohom,B}(r)$.

Sin embargo, para realizar el test estadístico, es necesario reducir las funciones $\hat{K}_{nohom,b}(r)$, $b = 1, \dots, B$, a un valor numérico. Una manera de hacerlo es especificando un $r = r_0$ fijo, y calculando el estadístico $\hat{K}_{nohom,b}(r_0)$ para $b = 1, \dots, B$. Bajo la hipótesis de AEC, los valores de los estadísticos simulados y el $\hat{K}_{nohom}(r_0)$ observado son variables aleatorias independientes (Baddeley et al., 2015). Luego, sea $r = r_0$ fijo, el procedimiento es descrito a continuación.

1. Calcular el estadístico $\hat{K}_{nohom}(r_0)$ para los patrón puntual observado x .
2. Para $b = 1, \dots, B$:
 1. Generar un patrón puntual x_b^* , donde x_b^* es una realización de un proceso puntual espacial *Poisson* no homogéneo con intensidad $\hat{\lambda}_0$.
 2. Calcular el estadístico $\hat{K}_{nohom,b}(r_0)$ para el patrón simulado x_b^* .
3. Dado un nivel de significancia α , los puntos críticos $\hat{K}_{nohom,\alpha/2}^*$ y $\hat{K}_{nohom,(1-\alpha/2)}^*$ son dado por los percentiles $100(\alpha/2)$ y $100(1 - \alpha/2)$ del vector de valores $\hat{K}_{nohom,b}^*$ ordenados. Luego, se rechaza $\mathcal{H}_0$ si $\hat{K}_{nohom}(r_0) < \hat{K}_{nohom,\alpha/2}^*$ o $\hat{K}_{nohom}(r_0) > \hat{K}_{nohom,(1-\alpha/2)}^*$.

Debido a que el r_0 debe ser prefijado, lo que se suele hacer es graficar la función $\hat{K}_{nohom,b}(r_0)$ para todo $r_0 \in (0, r_{max})$, e indagar a partir de la gráfica las posibles desviaciones de valores observados con respecto a la región de aceptación. Sin embargo, la presencia de desviaciones en algún rango de distancia no debe interpretarse como un resultado significativo en el rechazo de la hipótesis de AEC: el test no paramétrico anterior sólo admite interpretaciones inferenciales *para cada* r_0 . Por otro lado, la visualización de la función K (o L) presenta ciertas ventajas, como la posibilidad de contener información del proceso puntual en múltiples escalas (Baddeley et al., 2015).

Con el objetivo de establecer inferencia estadística para todos los $r \in (0, r_{max})$, surgen los test globales basados en *envolturas* (Myllymäki and Mrkvička, 2019; Myllymäki et al., 2017). En este contexto, una envoltura al $100(1 - \alpha)\%$ de significancia representa una banda acotada por las funciones $\hat{K}_{nohom}^{\alpha/2}(r)$ y $\hat{K}_{nohom}^{1-\alpha/2}(r)$, tal que la probabilidad de que el $\hat{K}_{nohom,obs}(r)$ se ubique fuera de la envoltura es igual a α ; esto es,

$$P(\hat{K}_{nohom}(r) \notin [\hat{K}_{nohom}^{\alpha/2,*}(r), \hat{K}_{nohom}^{1-\alpha/2,*}(r)], r \in (0, r_{max})) = \alpha. \quad (2.37)$$

Bajo la hipótesis de AEC, los vectores aleatorios $\hat{K}_{nohom,obs}$ y $\hat{K}_{nohom,b}^*$, $b = 1, \dots, B$ son idénticamente distribuidos y estadísticamente independientes. Luego, $\mathcal{H}_0$ es rechazada si $\hat{K}_{nohom,obs}$ se encuentra entre los $\alpha(B + 1)$ valores extremos del conjunto de vectores $\{\hat{K}_{nohom,obs}(r), \hat{K}_{nohom,1}^*(r), \dots, \hat{K}_{nohom,B}^*(r); r \in (0, r_{max})\}$ (Myllymäki et al., 2017).

2.4.3. Dependencia espacio temporal entre eventos

Análogamente al caso puramente espacial, se define un proceso puntual espacio temporal como intensidad-ponderado cuando

$$g(r, u) = \frac{\lambda_2((x, t), (x', t'))}{\lambda(x, t)\lambda(x', t')} \quad (2.38)$$

depende de $r = \|x - x'\|$ y $u = t - t'$, con $x, x' \in W$ y $t, t' \geq 0$, y

$$\lambda_2((x, t), (x', t')) = \lim_{|dx \times dt|, |dx' \times dt'| \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N(dx \times dt)N(dx' \times dt')]}{|dx \times dt||dx' \times dt'|} \quad (2.39)$$

es la función de intensidad espacio temporal de segundo orden (Diggle, 2013).

La función K no homogénea de un proceso espacio temporal intensidad-ponderado es definida por

$$K_{nohom}(r, u) = 2\pi \int_0^r \int_0^u g(r', u') r' dr' du'. \quad (2.40)$$

Si el proceso puntual es un proceso Poisson no homogéneo con intensidad positiva en todo punto, entonces $K_{nohom}(r, u) = \pi r^2 u$. Luego, análogamente al caso espacial, valores $K_{nohom}(r, u) > \pi r^2 u$ indicarán un comportamiento aglomerativo entre los eventos, en tanto valores $K_{nohom}(r, u) < \pi r^2 u$ sugerirán una regularidad entre eventos generados por el proceso estocástico.

Un estimador insesgado de la función K para un proceso puntual espacio temporal intensidad-ponderado es dado por

$$\hat{K}_{nohom}(r, u) = |W \times T|^{-1} \sum_{\substack{i \neq j \\ x_i, x_j \in W, t_i, t_j \in T}} \frac{1(\|x_i - x_j\| \leq r, \|t_i - t_j\| \leq u)}{\hat{\lambda}(x_i, t_i) \hat{\lambda}(x_j, t_j)} \omega_{ij}^{-1}, \quad (2.41)$$

$$0 \leq r \leq r_{max}, 0 \leq t \leq t_{max},$$

donde r_{max} y t_{max} son la distancia y tiempo máximos entre eventos en los cuales es evaluada la función, ω_{ij} es el factor de corrección en el borde espacio temporal, y $\hat{\lambda}(\cdot)$ es el estimador de la intensidad por kernel (2.28) (Gabriel and Diggle, 2009).

Debido a la imposibilidad de distinguir, a partir de una única realización de un proceso puntual espacio temporal, entre la inhomogeneidad de un proceso Poisson y la dependencia entre eventos, Gabriel and Diggle (2009) suponen un estimador de la intensidad espacio temporal separable; esto es,

$$\hat{\lambda}(x, t) = \hat{\lambda}_1(x) \hat{\lambda}_2(t), \quad (x, t) \in W \times T. \quad (2.42)$$

Bajo este supuesto, todo efecto no separable es atribuido a las propiedades de segundo orden del proceso puntual.

Similarmente al caso puramente espacial, el contraste de hipótesis de AEC es realizado mediante el test no paramétrico basado en simulaciones Monte Carlo, comparando la función $\hat{K}_{nohom}(r_0, t_0)$ observada - con $\hat{\lambda}$ obtenido a partir de (2.28) o (2.42) según el resultado del test de separabilidad - con $B - 1$ cantidades simuladas $\hat{K}_{nohom,b}^*(r_0, t_0)$. Luego, de existir interacción evidente en la gráfica de $\hat{K}_{nohom}$ - valores $\hat{K}_{nohom}$ bajo o sobre las envolturas -, aquellos r y t mínimos y máximos conformarán los *radios de interacción* espacial y espacio temporal (Fuentes-Santos et al., 2021).

2.5. Patrones Puntuales en el análisis de delitos

2.5.1. Identificación de *hotspots*

La distribución espacial de delitos ha sido un campo de estudio permanente de la criminología. La proliferación de tecnologías como los Sistemas de Información Geográfica (SIG) (Burrough et al., 2015; Ian, 2010) ha aumentado el interés en este aspecto, a través de la identificación de zonas que concentran una alta densidad de delitos. A estas zonas se les conoce como *hotspots*.

Una de las herramientas más utilizadas en el análisis espacial y espacio temporal inicial de la distribución de delitos es el mapeo de hotspots. En esencia, esta técnica consiste en la identificación de zonas con alta densidad de delitos a partir de datos históricos, con el objetivo de que la ocurrencia de futuros ilícitos se puedan prevenir, destinando recursos policiales o planes preventivos a estas áreas (Chainey et al., 2008). El supuesto básico en la interpretación de los hotspots es que la información geográfica histórica de eventos delictuales es un indicador válido en los patrones delictuales futuros.

Entre las técnicas gráficas utilizadas para identificar hotspots de delitos se encuentran el mapeado de puntos (figura 4.1), mapeado temático o *coropleta* (figura 3.4), mapeado grillado y estimación de densidad vía kernel (figura 4.2). Chainey et al. (2008) demostraron que diferentes técnicas pueden producir diferentes resultados, y por ende llegar a conclusiones disímiles. Además, el tipo de delito juega un papel importante en la selección de la técnica utilizada. Sin embargo, de todas las técnicas disponibles, la estimación de densidad vía kernel es considerada la técnica de interpolación continua más adecuada para representar patrones criminales (Chainey and Ratcliffe, 2013).

Las técnicas vistas hasta ahora para representar eventos delictuales son de naturaleza *retrospectiva*. Sin embargo, lo que usualmente interesa es pronosticar patrones futuros a partir de los datos pasados; esto es, un mapeado *prospectivo*. Trabajos como los de Bowers et al. (2004), Gerber (2014) y Kennedy et al. (2011b) son ejemplos de estimación de densidad espacial para predecir futuros hotspots. Sin embargo, gran parte de estos estudios suponen como hipótesis inicial la distribución Poisson de los eventos observados. Esto supone una complicación, como señalan Johnson et al. (2007), en tanto el supuesto de independencia entre eventos criminales - sobre todo delitos contra la propiedad - se ve constantemente refutado en la práctica, y desde la teoría criminológica.

2.5.2. Procesos Puntuales Auto-Excitados

Como vimos en la sección 2.3, un proceso puntual espacio temporal es caracterizado únicamente mediante su FIC (2.27). Una de las alternativas para modelar la intensidad espacio temporal condicional a partir de la marca temporal es la siguiente:

$$\lambda(x, t | \mathbf{S}_t) = \mu(x) + \sum_{j: (x_j, t_j) \in \mathbf{S}_t} g(x - x_j, t - t_j) , \quad (2.43)$$

donde g es una función kernel. Los modelos de este tipo se denominan *modelo de secuencia de terremotos de tipo epidémico* (en inglés, Epidemic Type Aftershock Sequence, ETAS), originalmente introducidos por Ogata (1998b) para representar la actividad de terremotos con una magnitud dada, en una región e intervalo de tiempo determinados. Como es ampliamente conocido, la ocurrencia de un terremoto aumenta las chances de ocurrencia de nuevos eventos sísmicos, en un espacio y tiempo aledaños. En este tipo de proceso puntual, cada sismo es representado como un punto en el espacio tiempo, donde $\mu(x)$ representa la tasa de ocurrencia constante en el tiempo (eventos tipo *background*), y la sumatoria en (2.43) representa el peso asociado a los eventos ocurridos cercanos en el espacio y tiempo (eventos tipo *aftershock*). A menudo se suponen los eventos background con una distribución Poisson *estacionaria*, y los eventos aftershock con una distribución Poisson *no estacionaria* (dependiente del espacio tiempo, y posiblemente la magnitud del sismo). En la literatura, a este tipo de procesos puntuales se le conocen también como Procesos Puntuales Auto-Excitados (PPAE).

La literatura criminológica ha demostrado que determinados tipos de crímenes presentan un comportamiento contagioso. Por ejemplo, zonas residenciales que sufren de hurtos en ausencia de moradores suelen transformarse en objetivo repetido por parte de delincuentes (Johnson et al., 2007), o tiroteos producto de enfrentamientos de pandillas suelen ser seguidas de eventos violentos (ajustes de cuentas, por ejemplo) (Fuentes-Santos et al., 2021). En el análisis espacial o espacio temporal de eventos delictuales, esto se traduce en la aparición de hotspots, los cuales pueden ser constantes en un tiempo considerable (*crónicos*), o *temporales*. En este contexto, Mohler et al. (2011) proponen un proceso estocástico del tipo PPAE adaptado al modelamiento de crímenes, tal que éste capture el efecto puramente espacial en la incidencia delictiva (efecto *background*, hotspots crónicos), y el efecto contagioso (efecto *aftershock*, hotspots temporales) producto de la ocurrencia de delitos recientemente en zonas cercanas.

Un modelo de este tipo puede ser más adecuado en contraparte a los métodos kernel, en tanto

el supuesto distribucional Poisson no sea corroborado por los datos. Además, permite la mejora del modelo cuando el objetivo es la predicción de futuros hotspots, a través de la introducción de covariables en el parte estacionaria del modelo, tales como variables demográficas (densidad poblacional) y socioeconómicas (índice de calidad de vida, porcentaje de desempleo), así como indicadores de riesgo específicos (percepción de seguridad de la población), entre otros.

Capítulo 3

Materiales y métodos

3.1. Área de estudio

Con una superficie de aproximadamente 203 km^2 y más de tres millones de habitantes, Buenos Aires (o Ciudad Autónoma de Buenos Aires, CABA) es la capital y ciudad más poblada de la República Argentina. La ciudad pertenece a la Provincia de Buenos Aires, y está conformada por quince comunas, las cuales son unidades descentralizadas de gestión política y administrativa que abarcan a uno o más barrios, y tienen competencias exclusivas y concurrentes con el Gobierno de la Ciudad (cuadro 3.1 y figura 3.1).

La provincia de Buenos Aires ha sufrido un crecimiento significativo de delitos contra la propiedad durante los últimos diez años (figura 3.2). Sin embargo, debido a la mayor cantidad de población con respecto al resto de las provincias, un indicador más adecuado para medir la incidencia de delitos contra la propiedad es la tasa de robos cada 100.000 habitantes. En ese sentido, es notoria la concentración de estos delitos en CABA, cuya tasa promedio durante la década pasada supera largamente al resto de las provincias de la República Argentina (figura 3.2). Al respecto, se han atribuido como causas la crisis socio-económica que ha impactado al país, además de razones estructurales (Cid Ferreira et al., 2017; La Ruffa, 2019). Por otro lado, es de notar que en Ciudad de Buenos Aires se produce un flujo constante de vehículos y personas, durante todo el año, que ingresan y egresan de la misma durante diversas horas del día, llegando incluso a duplicar su población registrada en los censos. Por esta razón, es posible que la tasa de delitos se vea sobredimensionada.

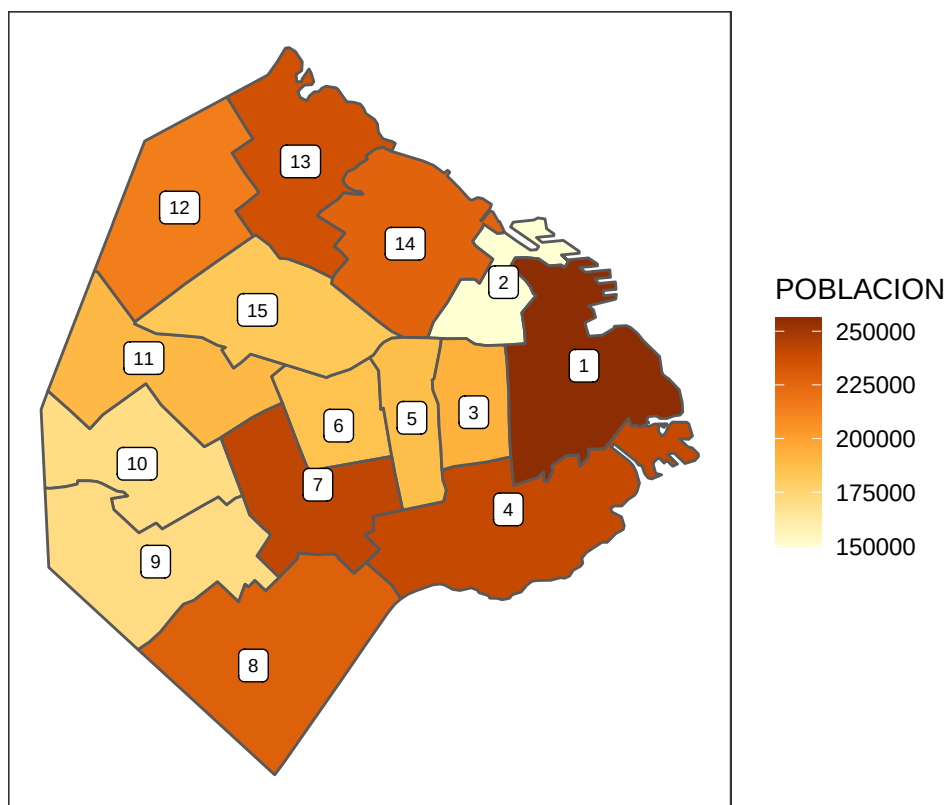


Figura 3.1: Población total por comuna (2020)

Como parte de las medidas de prevención del delito, el gobierno de Buenos Aires promovió la sistematización de la gestión de información de seguridad pública. Dentro de este plan, se contempló la elaboración de un Mapa del delito, el cual tiene como funciones principales *“avanzar en la elaboración de un diagnóstico certero de las causas y procesos que confluyen en los hechos delictivos registrados en las distintas Comunas, contribuir a la elaboración de estrategias de prevención y conjuración del delito, promover un direccionamiento estratégico de los recursos humanos y logísticos de los servicios de seguridad, y favorecer una respuesta oportuna a los requerimientos de la población en materia de seguridad”* (Sistema Integral de Seguridad Pública de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires *Capítulo II*, 2016).

En su versión 2020, el Mapa del Delito incluye como hechos delictivos registrados: Homicidios Dolosos, Homicidios y Lesiones por Siniestros Viales, Robos, y Hurtos. Como fuente principal de datos se consideraron los registros de denuncias realizadas en las quince comisarías comunales de CABA, además de denuncias del Ministerio Público Fiscal realizadas por otras vías (formulario web, correo electrónico, aplicación para teléfono celular, Fono 0800 FISCAL y cabinas en comisarías) (CABA, 2020).

Cuadro 3.1: Comunas en CABA

(*) Población proyectada para 2020 (Dirección General de Estadística y Censos, Ciudad de Buenos Aires)

Comuna	Población (*)	Superficie (Km^2)	Barrios
1	256405	17.8	Retiro, San Nicolás, Puerto Madero, San Telmo, Monserrat y Constitución
2	149430	6.3	Recoleta
3	193276	6.4	San Cristóbal y Balvanera
4	240100	21.6	Boca, Barracas, Parque Patricios y Nueva Pompeya
5	187518	6.7	Almagro y Boedo
6	185456	6.8	Caballito
7	241861	12.4	Flores y Parque Chacabuco
8	228953	22.2	Villa Soldati, Villa Riachuelo y Villa Lugano
9	171264	16.5	Parque Avellaneda, Liniers y Mataderos
10	170592	12.7	Villa Real, Monte Castro, Versalles, Floresta, Vélez Sársfield y Villa Luro
11	190076	14.1	Villa Gral. Mitre, Villa Devoto, Villa del Parque y Villa Santa Rita
12	214777	15.6	Coghlan, Saavedra, Villa Urquiza y Villa Pueyrredón
13	236358	14.6	Belgrano, Núñez y Colegiales
14	227115	15.8	Palermo
15	182465	14.3	Chacarita, Villa Crespo, Paternal, Villa Ortúzar, Agronomía y Parque Chas

En cuanto a los robos, se califica como tal *“todo hecho registrado como el apoderamiento de una cosa por violencia sobre la persona o el objeto, generalmente calificado los términos del Art. 164 y subs. del Código Penal, sin considerar la imputabilidad o culpabilidad del autor”* (CABA, 2020). Dentro del conjunto de datos de robos se definen algunos subconjuntos, como *Robo automotor*, *Robo con uso de moto* y *Robo con uso de armas*. Es de especial interés este último subconjunto, el cual se define como *“todo hecho registrado como Robo, cometidos mediante uso de arma cortante, arma impropia o arma de fuego, sin considerar la aptitud para el disparo de esta último* (CABA, 2020).

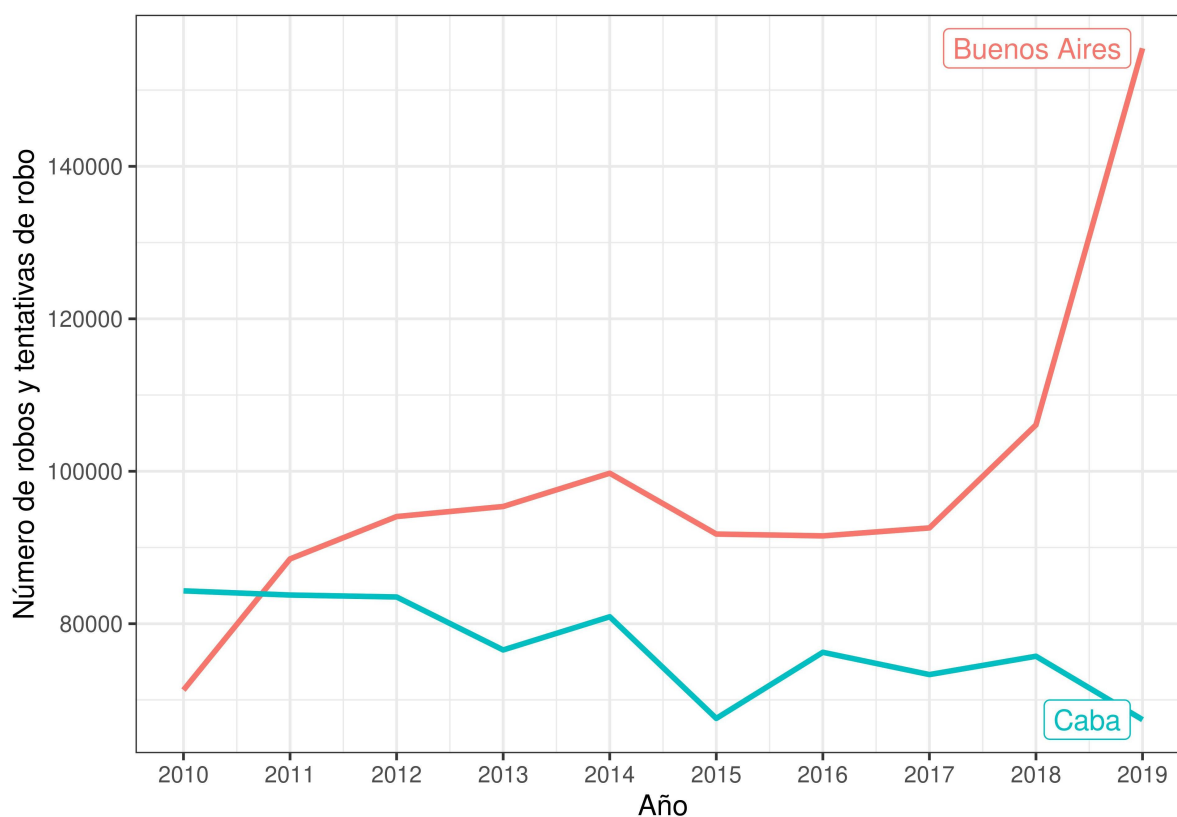


Figura 3.2: Evolución del número total de robos y tentativas de robos en la provincia de Buenos Aires y en CABA entre 2010 y 2019.

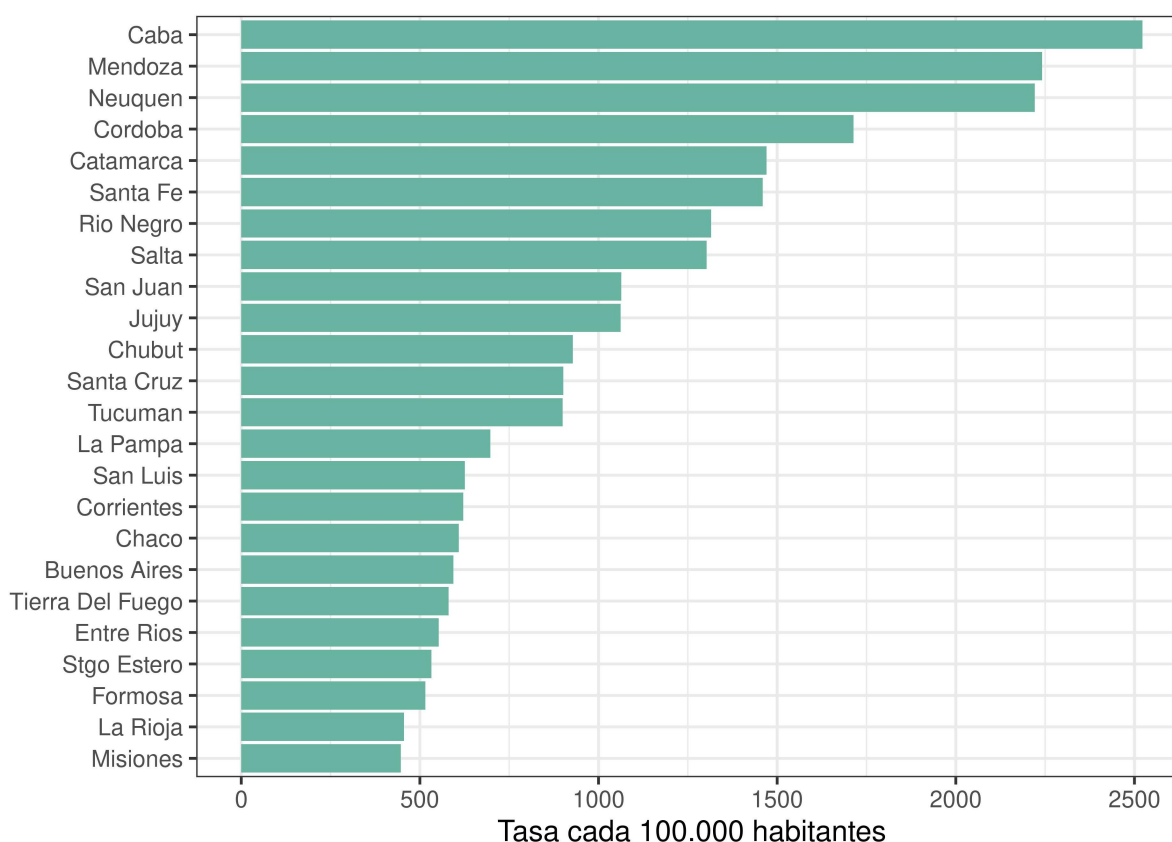


Figura 3.3: Tasa de robos y tentativas de robos cada 100.000 habitantes anual promedio por provincia (2010-2019).

3.2. Datos recolectados

El conjunto de datos de robos consiste en 34403 eventos registrados como cometidos durante el 2020, de los cuales se registró las coordenadas geográficas, fecha en que ocurrieron y una variable indicadora acerca del uso de armas en el hecho. Los delitos de robo considerados son aquellos cuya denuncia haya sido realizada hasta 30 días con posterioridad al delito (CABA, 2020), los cuales fueron obtenidos de la página web <https://data.buenosaires.gob.ar/dataset/delitos>.

Durante 2020, los robos denunciados en CABA presentaron una mayor frecuencia en los meses de Enero y Febrero (28 % del total aproximadamente). Es de notar la abrupta caída en Abril, la cual coincide con el inicio del Aislamiento Social Preventivo y Obligatorio (ASPO) decretado por el gobierno de la Ciudad de Buenos Aires ante la pandemia por COVID 19. A partir de Octubre, existe una tendencia al alza en la cantidad de delitos registrados, lo cual podría indicar un comportamiento estacional de los delitos de robos, además de coincidir con relajaciones en las medidas impuestas por el gobierno (Distanciamiento Social Preventivo y Obligatorio, DISPO).

Cuadro 3.2: Robos sin uso de armas y con uso de armas, por comuna

Comuna	Sin armas	Con armas
1	3376 (80.29 %)	829 (19.71 %)
2	1361 (83.5 %)	269 (16.5 %)
3	2463 (83.89 %)	473 (16.11 %)
4	2692 (67.64 %)	1288 (32.36 %)
5	1748 (84.12 %)	330 (15.88 %)
6	1274 (82.57 %)	269 (17.43 %)
7	2260 (79.52 %)	582 (20.48 %)
8	1681 (64.83 %)	912 (35.17 %)
9	1329 (71.26 %)	536 (28.74 %)
10	914 (76.74 %)	277 (23.26 %)
11	985 (80.87 %)	233 (19.13 %)
12	1300 (85.7 %)	217 (14.3 %)
13	1806 (85.23 %)	313 (14.77 %)
14	2417 (86.54 %)	376 (13.46 %)
15	1528 (80.72 %)	365 (19.28 %)
Total	27134 (78.9 %)	7269 (21.1 %)

La comuna con mayor cantidad de robos denunciados es la comuna 1 (4.205) y la 4 (3980), con bastante diferencia del resto de las comunas (figura 3.4). Del total de robos denunciados durante 2020, la mayoría son registrados como *sin armas* (79 %), siendo las comunas 8 y 4 aquellas con mayor porcentaje de uso de armas en los robos (>30 %) (cuadro 3.2).

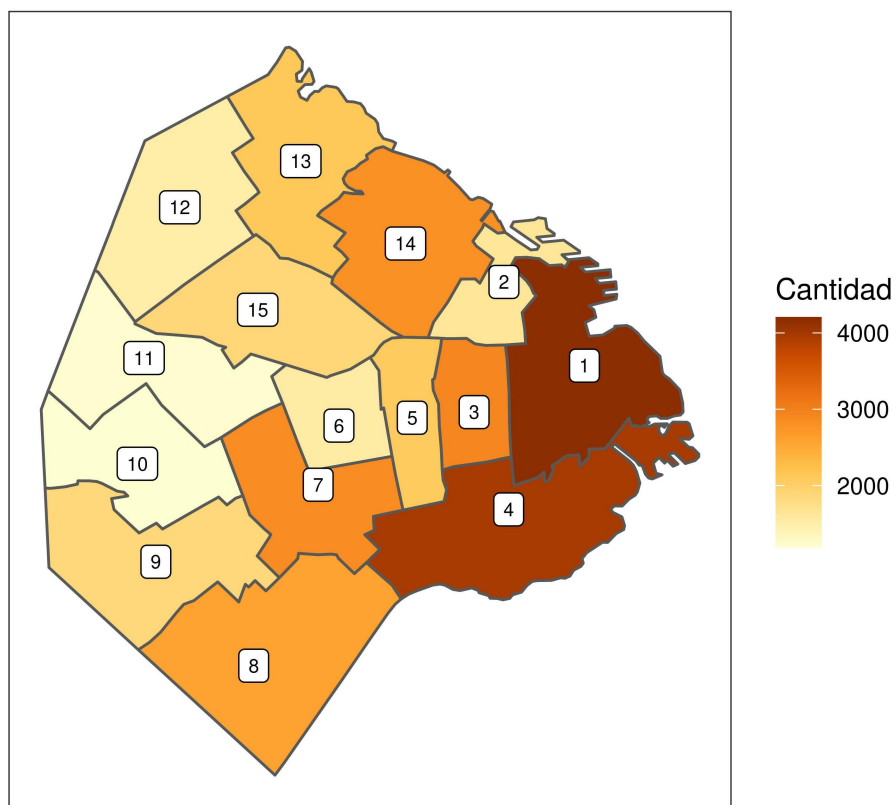


Figura 3.4: Cantidad de robos denunciado por comuna (2020)

Ahora, considerando la concentración de delitos de robo con respecto a la cantidad de población por comuna, las comunas 4, 1 y 3 son aquellas con mayor tasa de robos cada 100.000 habitantes (figura 3.5). Una de las razones que podría explicar la mayor tasa relativa respecto al resto de comuna aledañas es la presencia de centros de transbordo en estas comunas, lo cual genera mayor flujo poblacional del nominal y puede contribuir a una mayor cantidad de delitos en estas zonas (CABA, 2020).

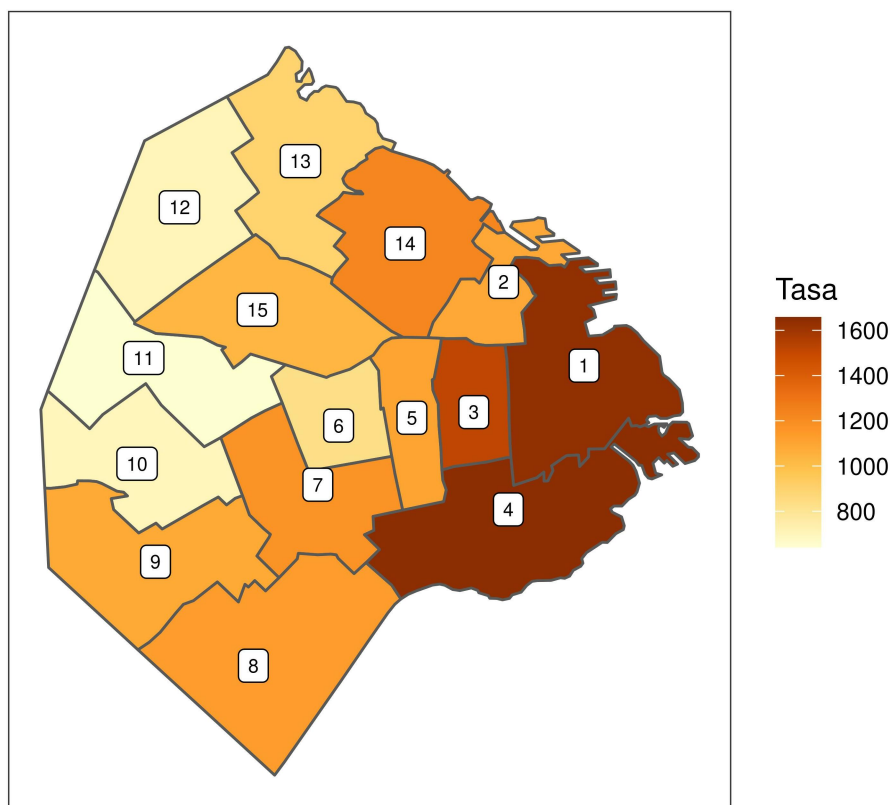


Figura 3.5: Tasa de robos cada 100.000 habitantes por comuna (2020)

Además, al observar la cantidad de robos denunciados por kilómetro cuadrado, resalta la comuna 3, muy por sobre el resto de la ciudad (figura 3.6). Esta comuna comprende los barrios San Cristóbal y Balvanera, los cuales pertenecen al denominado Centro de Buenos Aires. En particular, el barrio de Balvanera está situado al oeste del Centro, el cual se caracteriza por su alta densidad poblacional, flujo de tránsito vehicular constante y comercio formal e informal pujante. Estas características podrían contribuir a explicar la alta concentración de delitos contra la propiedad denunciados en esta zona durante 2020.

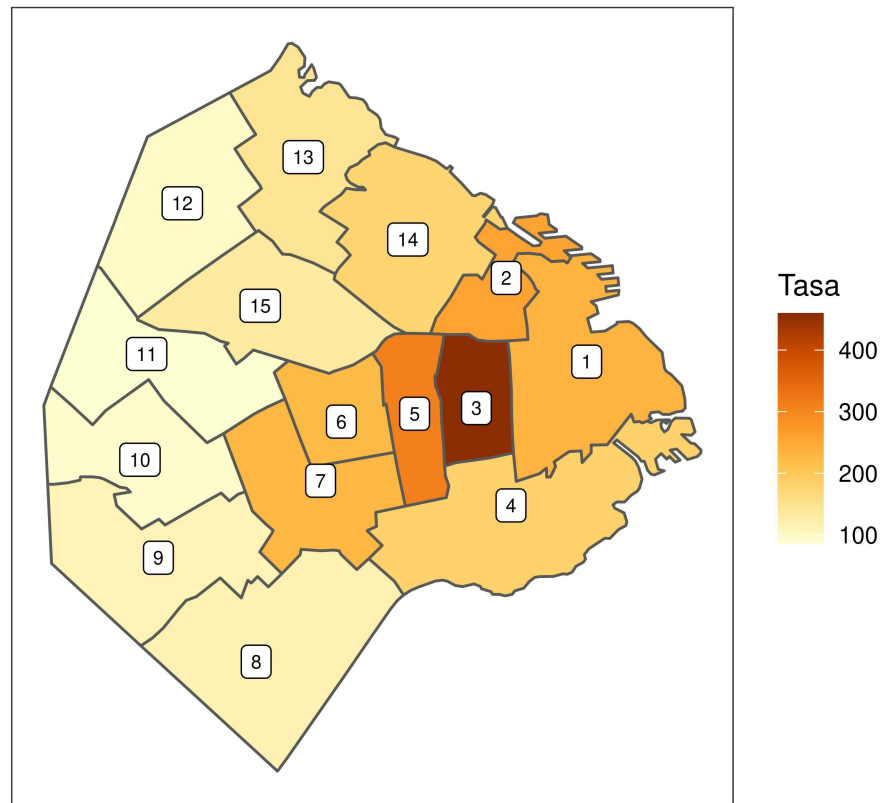


Figura 3.6: Cantidad de robos por km² por comuna (2020)

3.3. Software

El análisis estadístico realizado en este trabajo fue realizado en el entorno de software R (R Core Team, 2021). Para la lectura y manejo de los datos espaciales, y la estimación de la intensidad vía kernel se utilizó el paquete *spatstats* (Baddeley et al., 2015), en tanto que la selección de las matrices ancho de banda plug-in llenas fueron obtenidas gracias al paquete *ks* (Duong et al., 2021). El test de similitud fue implementado a partir de código propio (Apéndice A.1), en conjunto con la función *kde.test* del paquete *ks*. La estimación del log-riesgo relativo de uso de armas en los robos fue realizada mediante el paquete *sparr* (Davies et al., 2018), y el contraste de separabilidad espacio temporal fue llevado a cabo a partir del trabajo de Ghorbani et al. (2021), cuyo código está disponible en <http://www.runmycode.org/companion/view/4139>. Por último, el contraste de AEC espacial y espacio temporal fue implementado a partir del paquete *spatstats*, junto con código propio (Apéndice A.2). Para el caso del conjunto de robos sin arma, fue necesario en este último paso reducir el conjunto de datos, para realizar los cálculos respectivos. Del conjunto total de robos sin armas denunciados en CABA durante 2020 (27132 eventos), se seleccionó una muestra

aleatoria del 40 % del patrón observado (10772 robos registrados).

Capítulo 4

Resultados

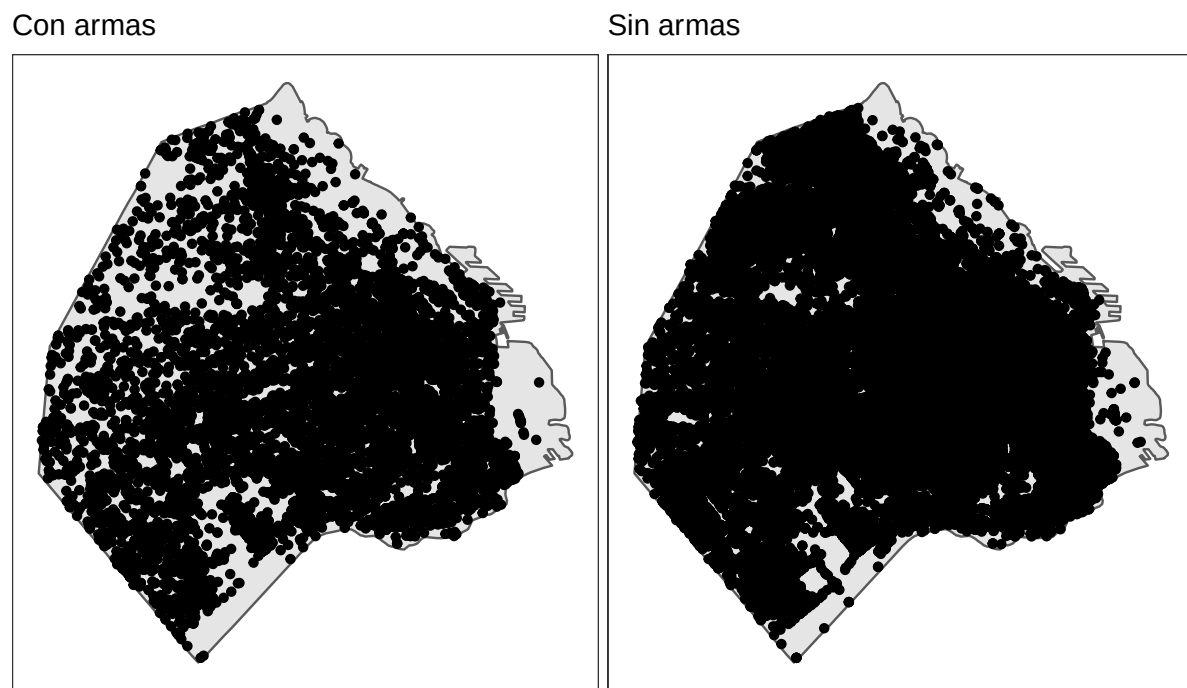


Figura 4.1: Robos con uso de armas y sin uso de armas, respectivamente, ocurridos en Ciudad de Buenos Aires durante 2020.

La figura 4.2 muestra la intensidad estimada para los robos denunciados en CABA durante 2020. Notemos que la intensidad observada es marcadamente no homogénea, con hotspots concentrados en el norte de la comuna 3 (barrio Balvanera), suroeste de la comuna 1 (barrio Constitución), y en menor medida la comuna 4 (barrios Nueva Pompeya y Barracas). Es importante notar que la aparente nula concentración de delitos de robo en algunas zonas (este de la ciudad, entre comunas 1 y 4, y suroeste, comuna 8) se debe a la presencia de instalaciones en estos lugares, que minimizan

la probabilidad de ocurrencia de estos delitos (Reserva Ecológica Costanera Sur y Autódromo Oscar y Juan Gálvez, respectivamente).

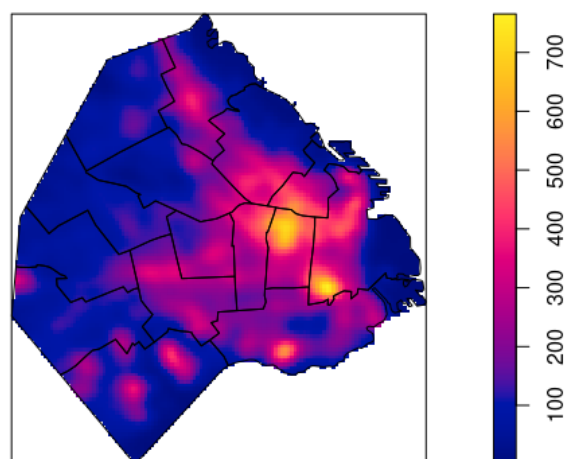


Figura 4.2: Estimación de la intensidad de primer orden de robos en Ciudad de Buenos Aires durante 2020

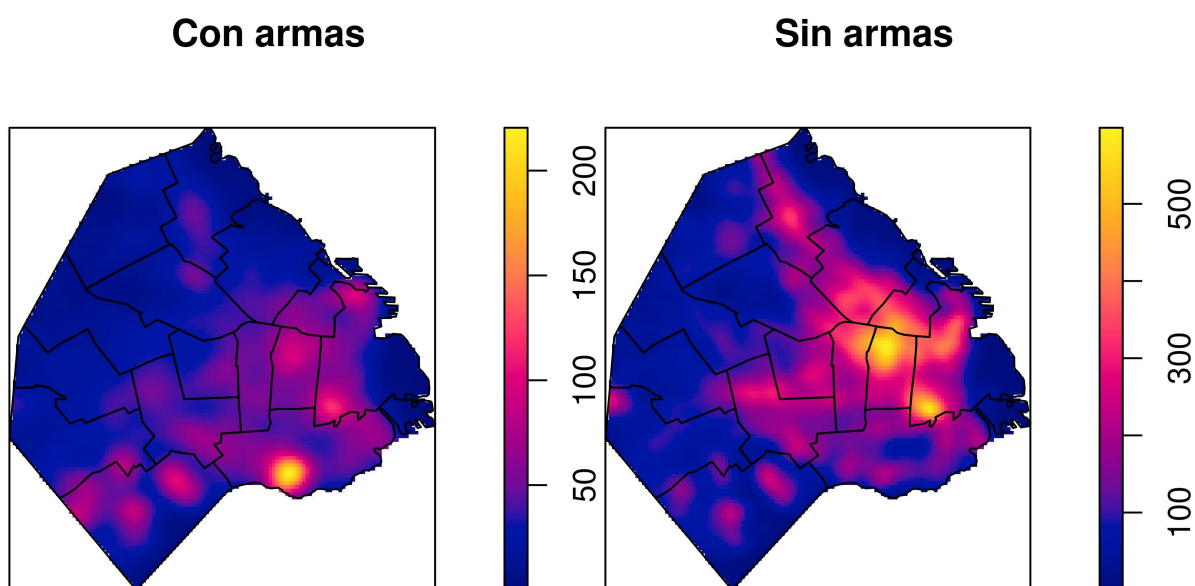


Figura 4.3: Estimación de densidad de robos denunciados en Buenos Aires durante 2020, con y sin uso de armas, respectivamente

Cuadro 4.1: Test de hipótesis de similaridad entre los patrones de robo con y sin arma denunciados en CABA durante 2020.

Test de hipótesis	Valor- <i>p</i>
H_0 : Ambos procesos puntuales tienen la misma intensidad	0

En el caso de los robos con uso de armas, es notoria la concentración de casos al sur de la comuna 4 (figura 4.3, izquierda). En cuanto a los robos reportados sin uso de arma, éstos tienen un comportamiento similar al conjunto de datos total (figura 4.3, derecha). Ésto sugiere una diferencia entre las propiedades de primer orden de las distribuciones espaciales de ambos subtipos de robos, lo cual es corroborado por test de similaridad Cramér Von Mises (cuadro 4.1). La distribución temporal de la ocurrencia de robos en CABA durante 2020 es claramente no homogénea, con *peaks* reportados durante los meses de Enero y Febrero, seguidos de una caída notoria para volver a aumentar desde el comienzo del segundo semestre hasta el mes de Diciembre (figura 4.4). Este comportamiento es similar tanto en los robos con y sin armas observados. En cuanto a la distribución espacial para los distintos meses del año, se puede ver una mayor concentración en los hotspots durante los meses de mayor frecuencia (Enero y Febrero) (figura 4.5). Además, existen diferencias entre las intensidades estimadas entre meses distintos, las cuales son corroboradas por el test de similaridad no paramétrico, siendo los meses Agosto y Septiembre los únicos donde no se detectó una discrepancia significativa entre ambos (cuadro 4.2).

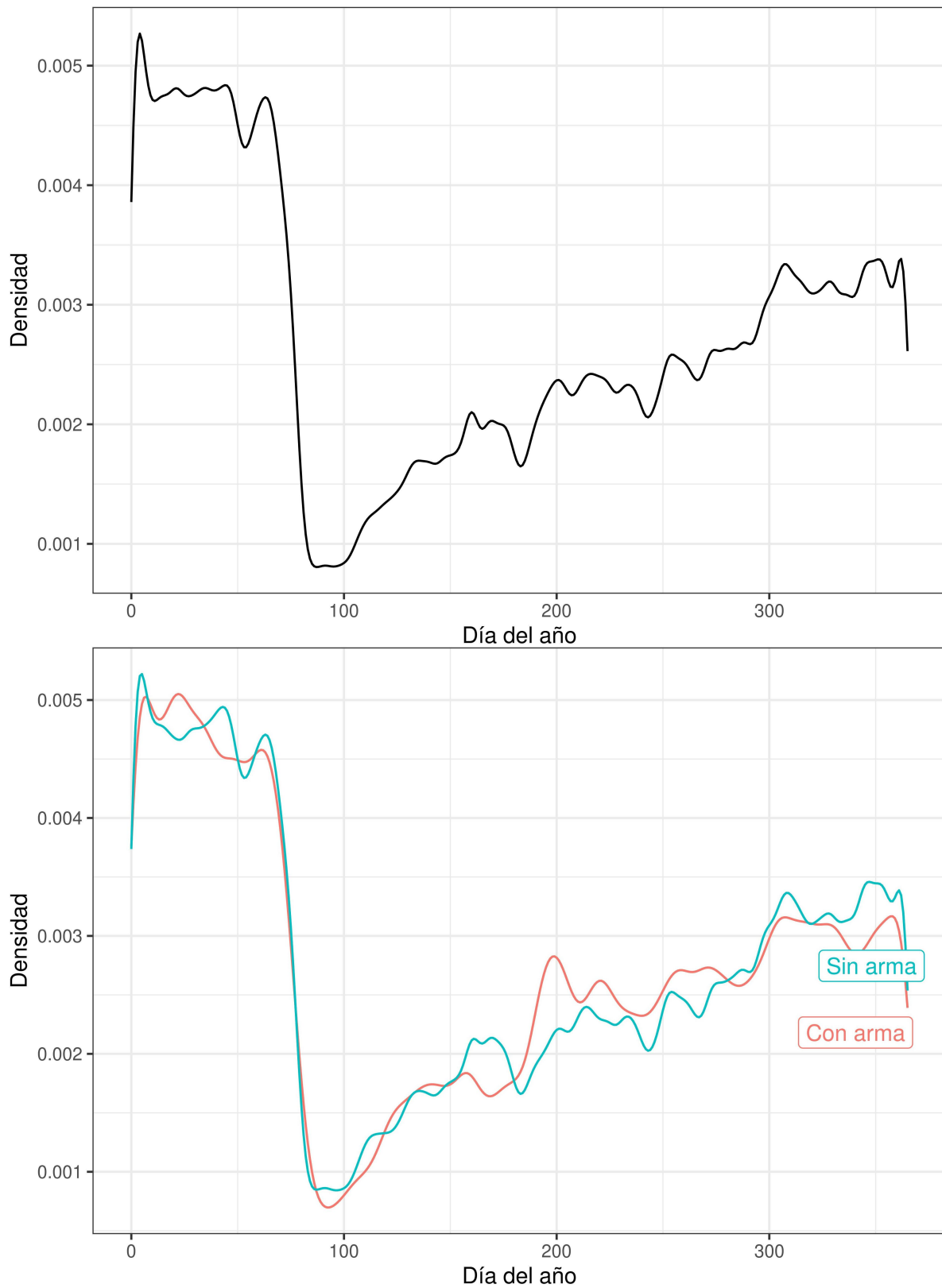


Figura 4.4: Estimación de densidad temporal de robos en Buenos Aires durante 2020. Arriba, la densidad estimada de robos denunciados en CABA durante 2020. Abajo, las densidades kernel de los robos con uso de armas y sin uso de armas reportados.

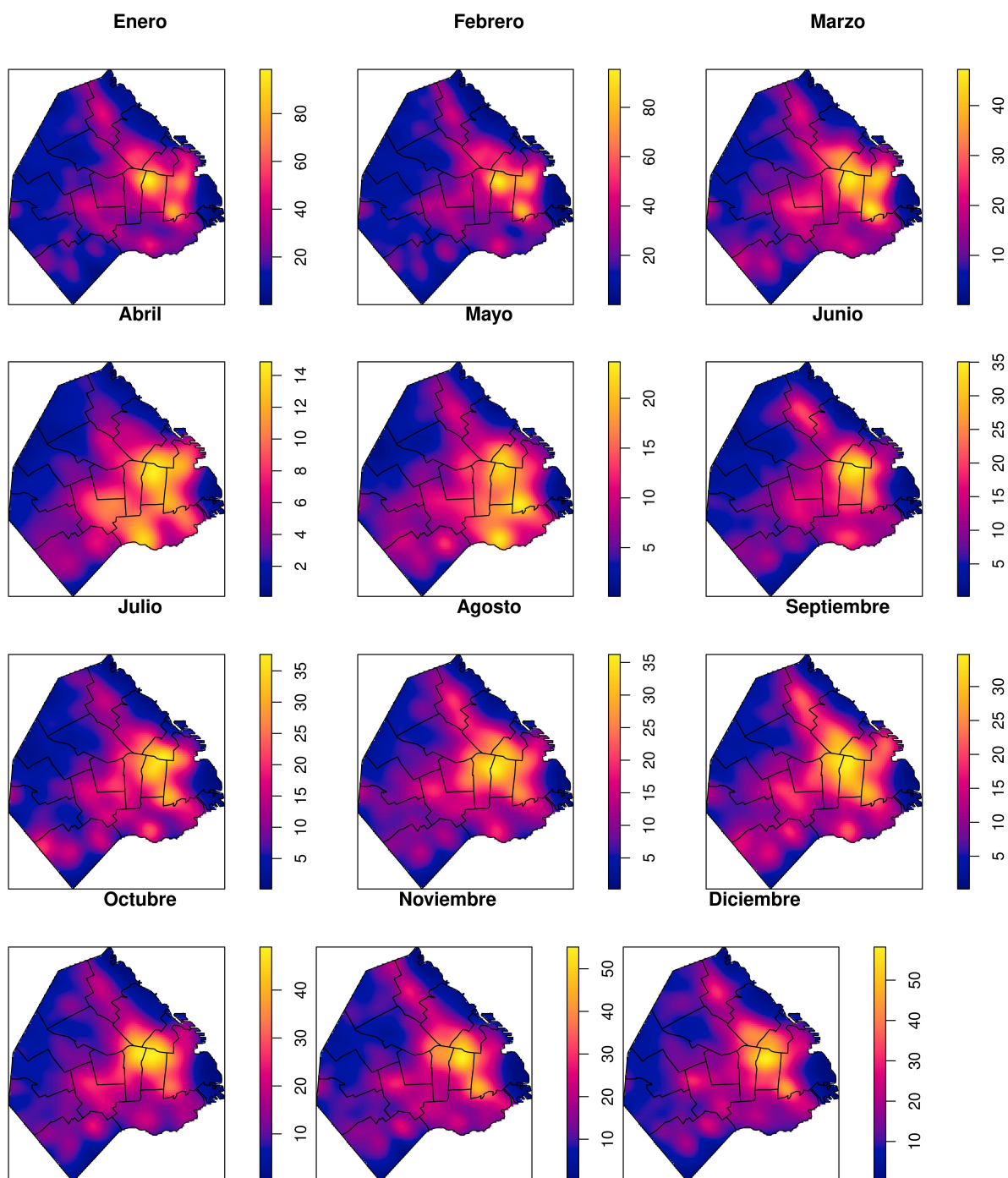


Figura 4.5: Estimación de intensidad de robos con violencia en Buenos Aires (2020) por mes

Cuadro 4.2: Tabla con los valores-p, resultados de los test de similaridad de primer orden entre los patrones de robos observados en cada mes.

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov
Feb	<0.05										
Mar	<0.05	<0.05									
Abr	<0.05	<0.05	<0.05								
May	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05							
Jun	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05						
Jul	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05					
Ago	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05				
Sep	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	0.15			
Oct	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05		
Nov	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	
Dic	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05	<0.05

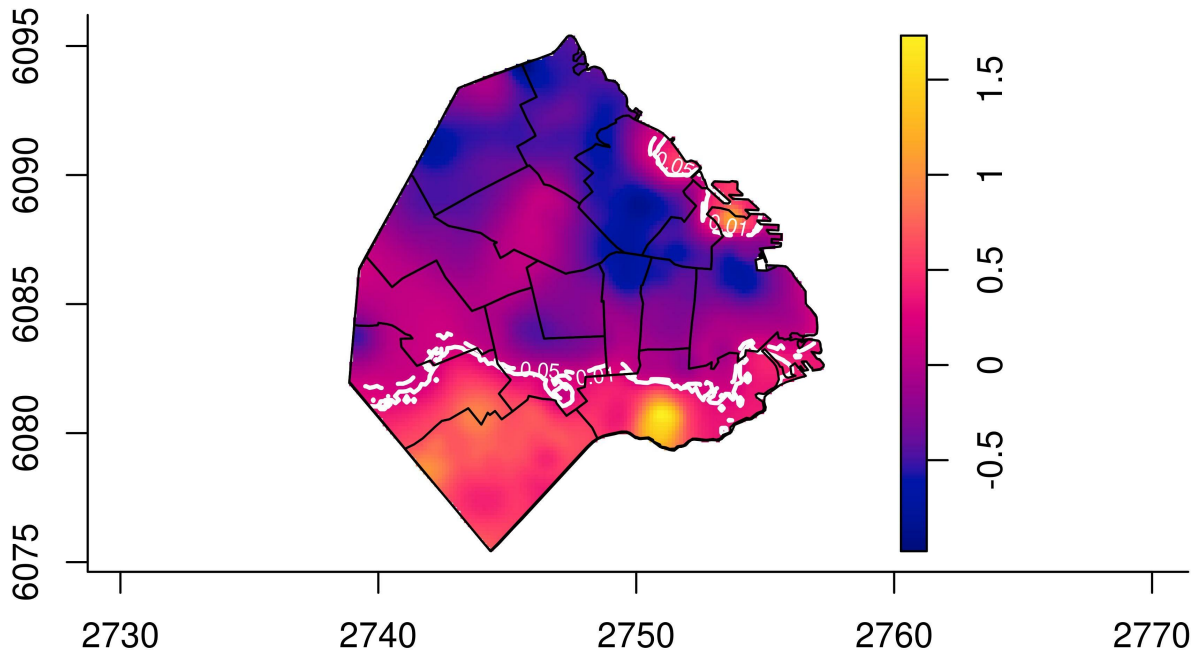


Figura 4.6: Estimación del log-riesgo relativo de uso de armas en robos denunciados en Buenos Aires durante 2020. Las líneas blancas denotan los contornos de tolerancia al cinco por ciento de significancia.

El riesgo relativo del uso de arma en un robo en CABA estimado se muestra en la figura 4.6. Nuevamente, se puede ver hotspots en el sur de la ciudad capital, con contornos de tolerancia significativos rodeando las comunas 4, 8 y 9. Es de notar el riesgo significativo detectado en la zona portuaria, al norte de la comuna 1 (barrio Retiro). Esto puede sugerir cierta tendencia al tipo de robo predominante en la zona, con una violencia inusualmente más alta con respecto a otras

Cuadro 4.3: Test de hipótesis de separabilidad de proceso generador de delitos de robos con arma en CABA.

Test de hipótesis	Valor- <i>p</i>
H_0 : La intensidad del proceso espacio temporal es separable	0.001

zonas céntricas de la capital.

En adelante, el análisis de de los patrones de robos en CABA durante 2020 fueron realizados separadamente para los casos de robos con y sin arma, siguiendo los resultados anteriores de no similaridad para ambos tipos de delitos. En las figuras 4.8 y 4.9 podemos ver aquellas distintas zonas geográficas donde existe una intensidad espacio temporal significativamente alta o baja de robos con uso de arma, respectivamente. Es de interés indigar la zona roja al norte de la ciudad (comuna 13) alrededor del día 125 (inicios de abril) en la figura 4.8, la cual no fue calificada como un hotspot en el análisis puramente temporal, pero con una inusitada frecuencia de robos en un corto período de tiempo, la puede reflejarse en la intensidad espacio temporal más alta de lo normal (hotspot temporal). La hipótesis de separabilidad es refutada para ambos casos (robos con arma, cuadro 4.3, y robos sin arma, cuadro 4.4) mediante el test basado en permutaciones visto en el Capítulo 3..



Figura 4.7: Visualización del estadístico S, calculado para robos con arma en 12 días distintos del año.



Figura 4.8: Envolturas superiores, obtenidas a través de 999 patrones permutados, obtenidas para robos con arma en 12 días distintos del año. Las zonas rojas denotan áreas con una intensidad espacio temporal significativamente alta.

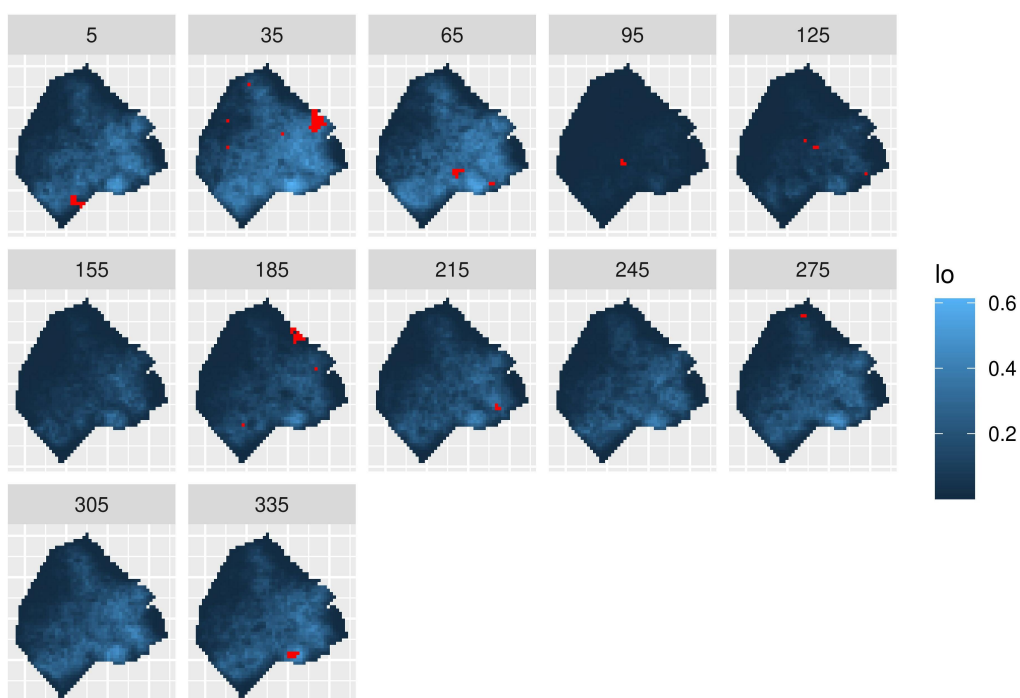


Figura 4.9: Envolturas inferiores, obtenidas a través de 999 patrones permutados, obtenidas para robos con arma en 12 días distintos del año. Las zonas rojas denotan áreas con una intensidad espacio temporal significativamente baja.

Cuadro 4.4: Test de hipótesis de separabilidad de proceso generador de delitos de robo sin arma en CABA.

Test de hipótesis	Valor- p
H_0 : La intensidad del proceso espacio temporal es separable	0.001



Figura 4.10: Visualización del estadístico S observado, calculado para robos sin arma en 12 días distintos del año.



Figura 4.11: Envolturas superiores, obtenidas a través de 999 patrones permutados, calculado para robos sin arma en 12 días distintos del año. Las zonas rojas denotan áreas con una intensidad espacio temporal significativamente alta.

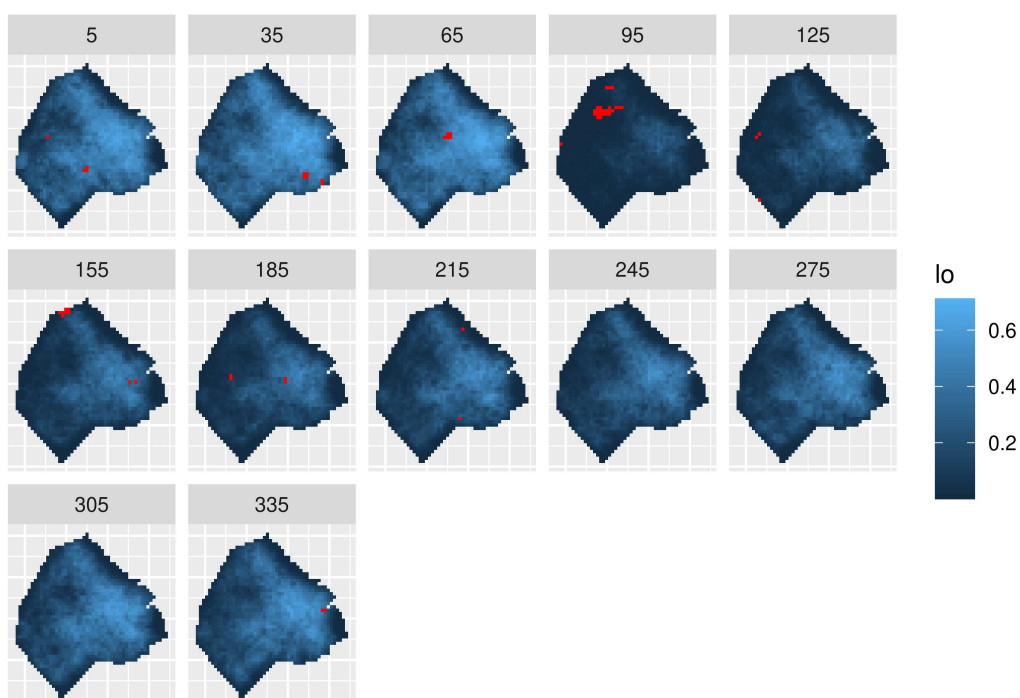
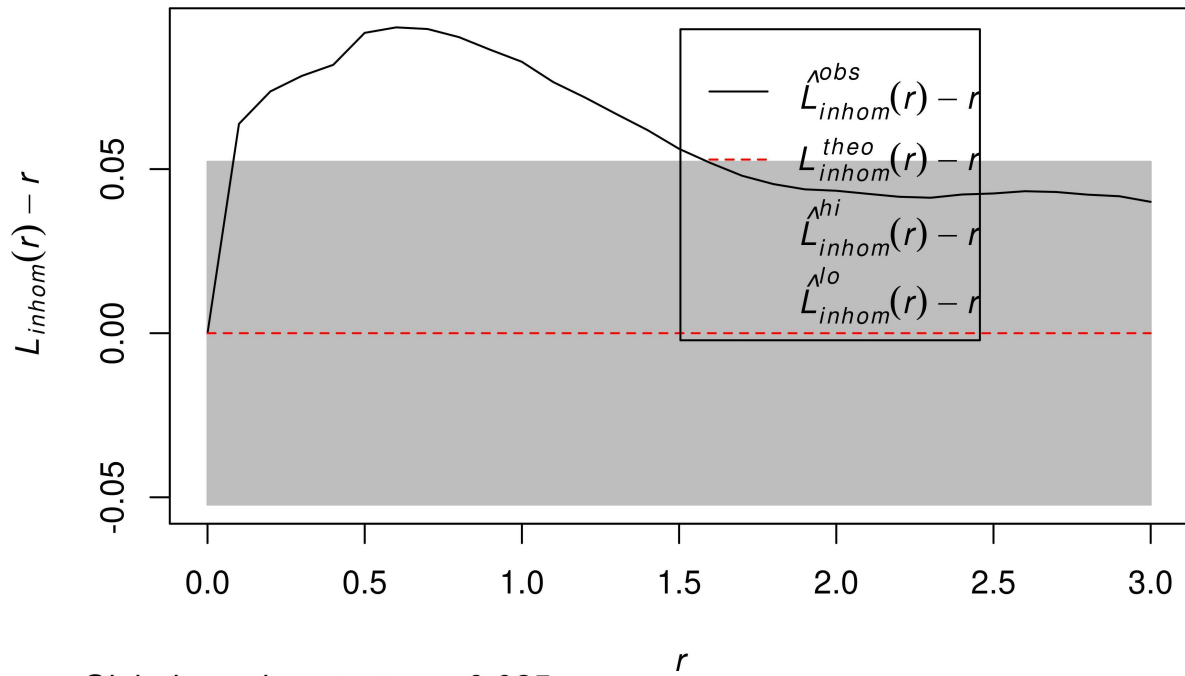


Figura 4.12: Envolturas superiores, obtenidas a través de 999 patrones permutados, calculados para robos sin arma en 12 días distintos del año. Las zonas rojas denotan áreas con una intensidad espacio temporal significativamente baja.

El análisis de segundo orden fue estimado mediante la estimación de las funciones K_{nohom} y L_{nohom} , junto con las respectivas envolturas simuladas para cada subtipo de robo. En el caso de los robos con uso de arma, se detectó un aglomeramiento significativo en un radio menor a 1.5 km aproximadamente (figura 4.13). Similarmente, para el caso de los robos sin arma existe un aglomeramiento espacial de los delitos, pero menos fuerte en zonas inmediatamente cercanas (menores a 0.7 km aprox.) (figura 4.14). En ambos casos, los resultados de test de hipótesis globales rechazan la hipótesis de AEC.



Global envelope test: $p = 0.025$

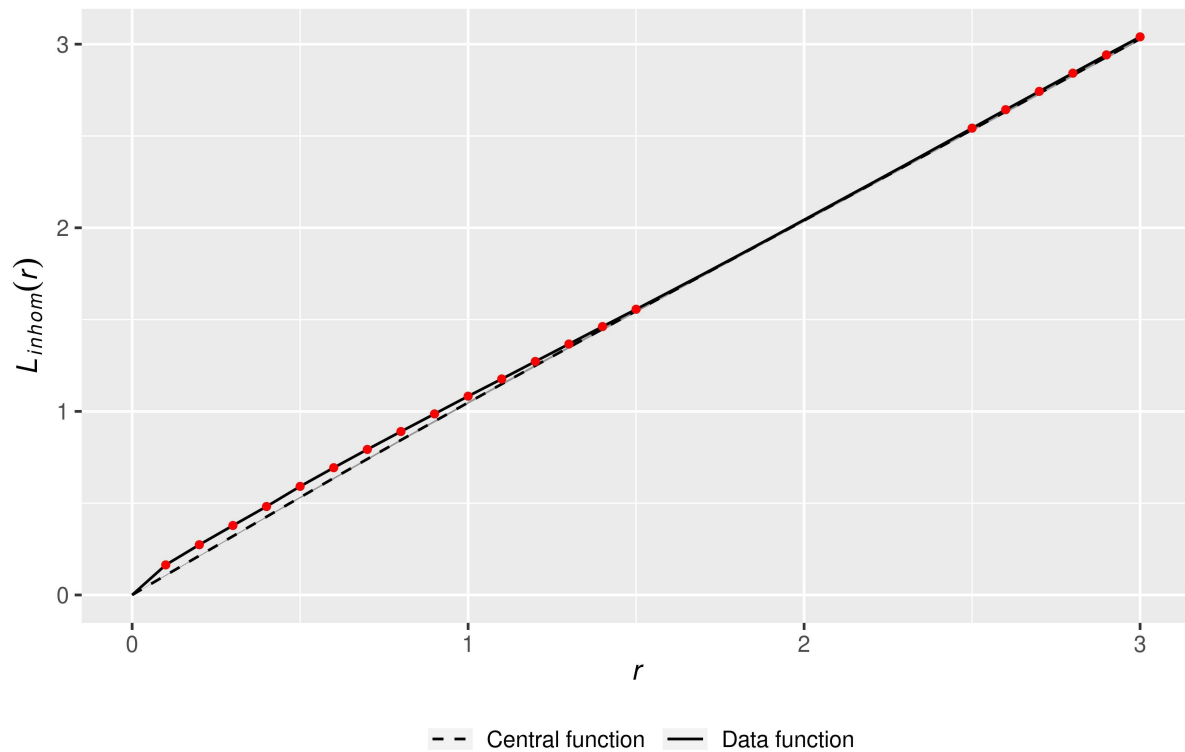
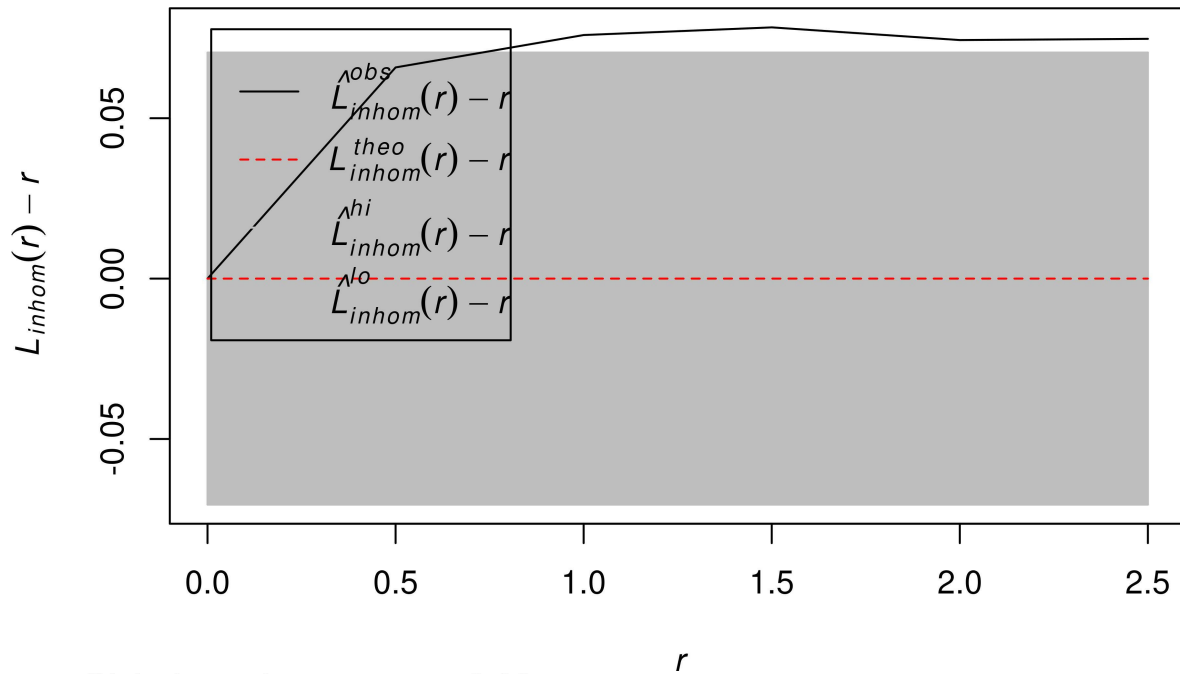


Figura 4.13: Arriba, la función L no homogénea estimada para robos con arma denunciados en CABA durante 2020, junto con 39 patrones puntuales simulados y su respectiva región de aceptación. Abajo, la función K no homogénea teórica y la estimada. En rojo, las distancias donde existe un aglomeramiento significativo en el patrón observado.



Global envelope test: $p = 0.025$

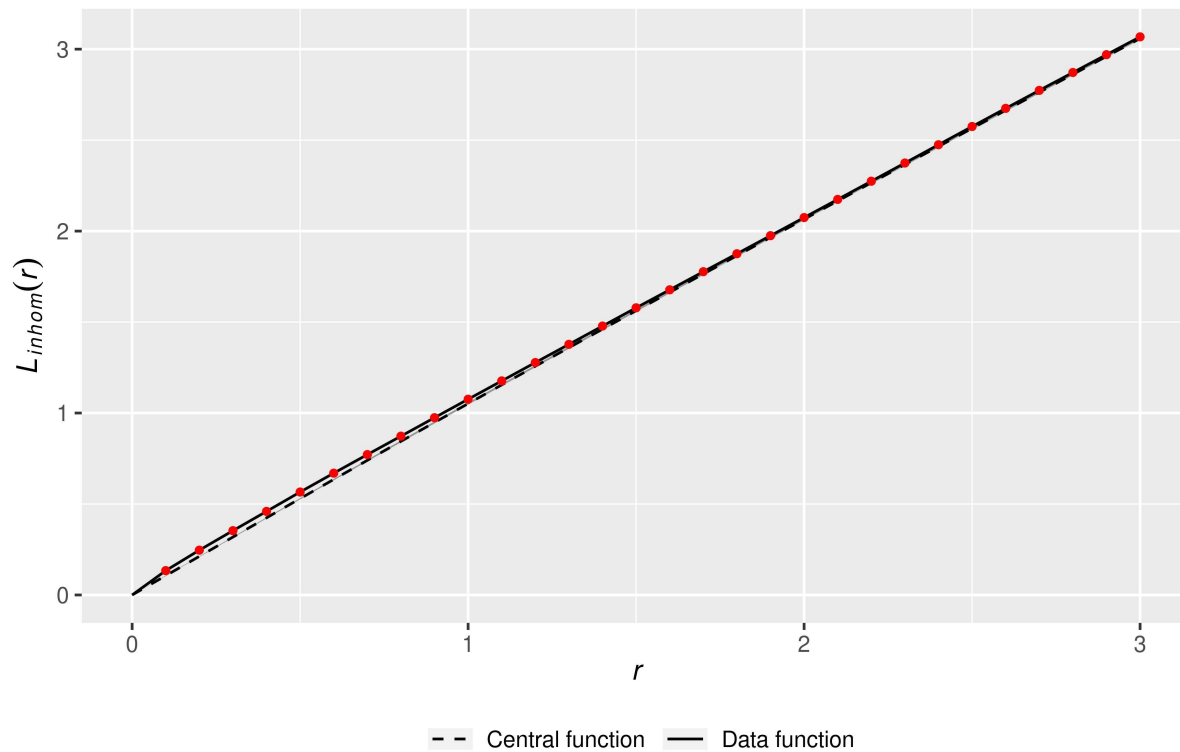


Figura 4.14: Arriba, la función L no homogénea estimada para robos sin arma denunciados en CABA durante 2020, junto con 39 patrones puntuales simulados y su respectiva región de aceptación. Abajo, la función K no homogénea teórica y la estimada. En rojo, las distancias donde existe un aglomeramiento significativo en el patrón observado.

La función K espacio temporal no homogénea estimada para los robos con uso de arma (figura 4.15) indica un aglomeramiento espacio temporal significativo en una ventana de 10 días y radio de 1.5 km, lo cual sugiere un comportamiento contagioso en la ocurrencia de robos en este rango. Las zonas más afligidas por estos delitos son, como vimos en la figuras 4.3 y 4.6, los barrios Nueva Pompeya y Barracas en la comuna 4, y el barrio de Retiro en la comuna 1. Una de las causas atribuibles son la precariedad socioeconómica (presencia de *villas miseria*, en particular la Villa 21 – 24, la más grande de CABA, y la Villa 31, en el barrio de Retiro), lo cual genera motivación por parte de los delincuentes, en conjunto con otras condiciones como ausencia de control social y ausencia de recursos policiales y de seguridad para estas zonas.

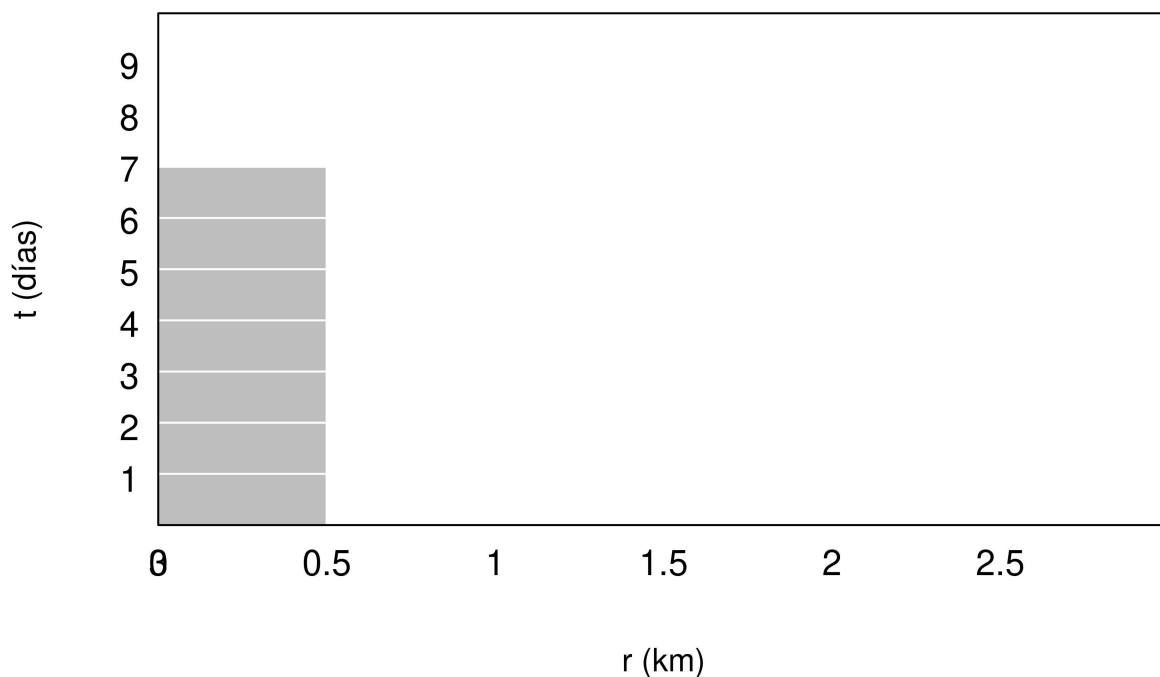


Figura 4.15: Función K no homogénea espacio temporal estimada, para robos con arma en CABA durante 2020. En gris, los rangos espacio temporales en los cuales la K estimada es significativa al 5 % (superior al valor crítico simulado)

Para el caso de los robos sin arma denunciados en CABA durante 2020, el test Monte Carlo basado en estadístico K espacio temporal no homogéneo, obtenido en un rango de 3 km y 10 días, presentó un aglomeramiento espacio temporal para todas las combinaciones de distancias y días considerados (figura 4.15). Esto podría deberse a la mayor densidad de robos sin arma, con un comportamiento espacial relativamente más estable en el tiempo (hotspots crónicos). Como se mencionó en el Capítulo, los robos de este tipo se concentran en el centro de la capital federal (barrios Balvanera, San Nicolás, Monserrat y Constitución), los cuales, por su alta densidad

poblacional, flujo vehicular de pasajeros, concentración de centros comerciales, edificios públicos y oficinas; presentan oportunidades a los delincuentes. La *Teoría de las actividades rutinarias* (Brantingham and Brantingham, 2010) ayuda a explicar este comportamiento desde la criminología.

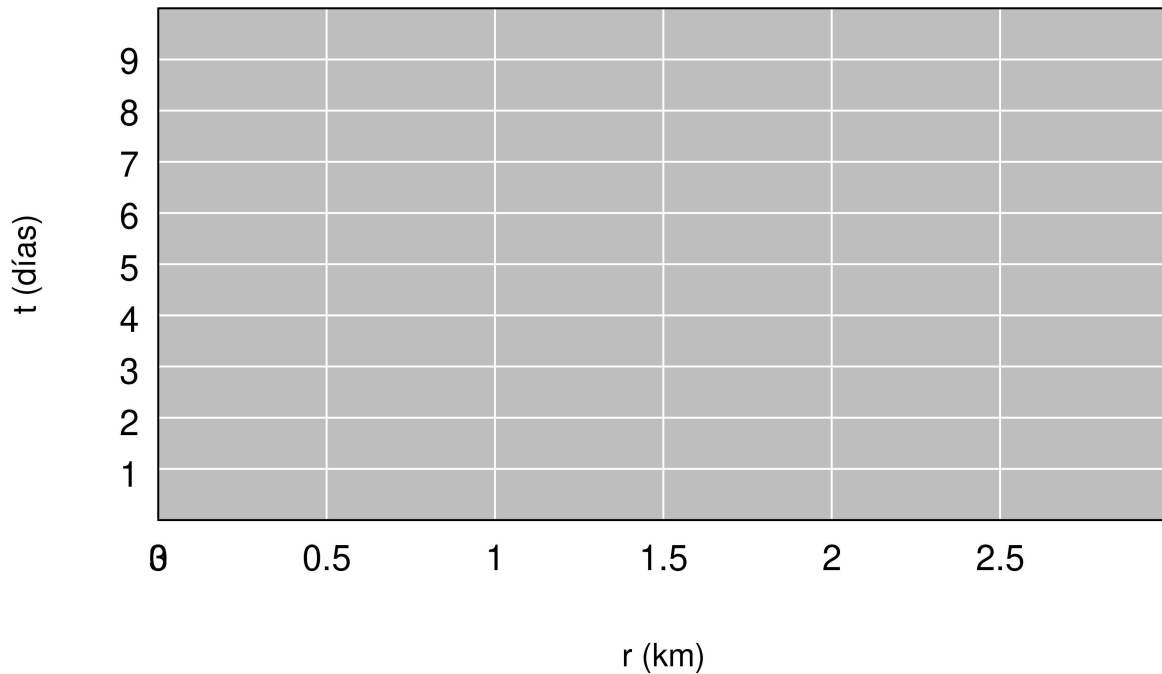


Figura 4.16: Función K no homogénea espacio temporal estimada, para robos con arma en CABA durante 2020. En gris, los rangos espacio temporales en los cuales la K estimada es significativa al 5 % (superior al valor crítico simulado)

Capítulo 5

Conclusiones

El avance de las tecnologías de la información y la creciente difusión de la filosofía *Open Data* ha permitido que cada vez más organizaciones gubernamentales pongan a disposición datos y estadísticas de interés ciudadano. En particular, bases de datos de delitos, históricamente de acceso exclusivo por parte de las policías y departamentos especializados, se han liberado paulatinamente por parte de algunos Gobiernos, para su libre acceso y descarga. En ese sentido, y en línea con lo realizado en otras ciudades del mundo (Bogotá, Nueva York, Chicago, Toronto o Londres), la iniciativa del Gobierno de Ciudad Autónoma de Buenos Aires de la publicación del *Mapa del Delito* busca, al mismo tiempo, guiar la formulación de políticas públicas de seguridad más eficaces y eficientes en materia de seguridad, y brindar una opción de consulta sencilla para toda persona sin conocimiento técnico en seguridad, análisis del delito, y/o jurídico. (CABA, 2020). El mapa del delito incluye crímenes en contra de la vida de las personas (Homicidios Dolosos, Homicidios y Lesiones por Siniestros Viales), y delitos de mayor ocurrencia a tales como los robos y hurtos. En este trabajo, se han considerado los 34.401 robos denunciados durante 2020 y efectivamente ubicados geográficamente, donde cada evento incluye una variable indicadora del uso de armas en el hecho.

Entre las técnicas implementadas para el estudio de delitos- y robos/hurtos en particular- se incluyen mapeado prospectivo mediante estimación de densidad por kernel (Bowers et al., 2004; Chainey et al., 2008; Gerber, 2014) y Procesos Puntuales Auto-Excitados (PPAE) (Mohler et al., 2011; Reinhart, 2018). Cada uno de estos modelos implican asumir ciertos supuestos acerca del comportamiento de los eventos en cuestión, en particular la dependencia o interacción entre éstos. Los modelos basados en la estimación vía kernel pueden ser utilizados para la predicción de patrones futuros en tanto el proceso puntual sea un proceso Poisson; esto es, los eventos delictivos

sean *independientes*. En tanto, la modelación a través de PPAE asumen un comportamiento aglomerativo de los eventos generados (Mohler et al., 2011). Con el objetivo de determinar el tipo de modelamiento adecuado para la predicción de hotspots de robos en CABA, y basándonos en el trabajo de Fuentes-Santos et al. (2021) para el análisis espacio temporal de tiroteos en Rio de Janeiro, se ha realizado un análisis exploratorio no paramétrico de los patrones de robos en Ciudad de Buenos Aires, tomando como muestra los robos denunciados y efectivamente localizados a lo largo de 2020.

Primero, se han caracterizado las propiedades de primer orden del patrón puntual de robos. Tanto para el caso de robos con uso de armas y sin uso de armas, fue estimada la intensidad espacial de primer orden, a partir del estimador kernel propuesto por Fuentes-Santos et al. (2016). A partir de estos resultados, se puede observar un comportamiento altamente no homogéneo, con hotspots en la zona central de la ciudad (Comuna 3, barrio Balvanera y Comuna 1, barrio Constitución), además de zonas con un riesgo significativamente alto de uso de armas en robos perpetrados (Comuna 4, barrios Nueva Pompeya/Barracas y Comuna 1, barrio Retiro). Ambos patrones de delitos- con y sin uso de armas- fueron detectados como significativamente distintos en cuanto a sus propiedades de primer orden, lo cual sugirió proseguir el análisis por separado para cada caso.

A partir del test de separabilidad espacio temporal propuesto por Ghorbani et al. (2021), se comprobó que la distribución espacial de robos varió significativamente en el tiempo durante 2020, para ambos tipos de robos. Esto sugiere la incorporación de covariables de naturaleza temporal, para un futuro modelo predictivo.

A partir de los resultados anteriores, se contrastaron las propiedades de segundo orden, en particular las hipótesis de Aleatoriedad Espacial Completa (AEC) y Aleatoriedad Espacio Temporal Completa (AETC). Mediante la función K no homogénea (Baddeley et al., 2000), se detectó un aglomeramiento espacial significativo, tanto para los robos con y sin uso de armas. En el caso de robos con uso de armas, el radio de interacción fue de aproximadamente 1.5 km, menor que para el caso de robos sin arma (> 2 km). Y mediante la extensión espacio temporal de la función K (Gabriel and Diggle, 2009), se rechazó la hipótesis de AETC, al encontrar un aglomeramiento significativo en los robos con armas, con concentraciones en una ventana de 8 días, y a distancias menores a 0.5 km, y para una radio menor a 3 km y 10 días para los robos sin uso de armas. A partir de estos resultados, los modelos basados en PPAE son adecuados para predecir hotspots futuros de robos en CABA, en tanto sus supuestos se ajustan al comportamiento observado en este

análisis, y permiten descomponer el efecto espacial en la incidencia delictual (hotspots crónicos en comunas 3, 1 y 4, por ejemplo) y el efecto contagioso en la ocurrencia de robos perpetrados en CABA.

Por último, es importante recalcar la precaución al momento de establecer conclusiones a partir de datos de crímenes. Como señalan Mosher et al. (2010) , en el estudio de crímenes las cifras se deben tratar con un grado de escepticismo, y considerar todos los factores que influyen en la recolección de los datos. El subreporte es un problema constante en la práctica criminológica, y debe tenerse en cuenta en todo intento de modelar estadísticamente el fenómeno delictual, a la vez de considerar el contexto territorial, y apoyarse en la teoría criminológica.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Test de similitud no paramétrico

Sección 2.2.3

```
library(ks)
library(spatstat)

simtest.boot <- function(X, n1, n2, wind, m = 1000){
  # X .....Patrón puntual observado (formato ppp)
  # n1 .....Número de observaciones en el patrón puntual x1
  # n2 .....Número de observaciones en el patrón puntual x2
  # wind .....Ventana de la región de interés (formato owin)
  # m .....Número de replicaciones

  # Genera m realizaciones bootstrap
  # Calcula el estadístico T Cramér Von Mises para cada simulación
  # Retorna un vector de m estadísticos T*

  n <- X$n      # Número de eventos observados
  df <- cbind(x = X$x, y = X$y)
  H <- Hpi(x = df)    # Matriz ancho de banda llena obtenida mediante selector
  # plug-in
```

```

D <- density.ppp(X, diggle = T, varcov = H, at = "pixels")
# Densidad estimada vía kernel con factor de corrección en el borde,
# con matriz ancho de banda H y estimada en una grilla de 128x128 pixeles

D1 <- D; D2 <- D
D1$v[!is.na(D1$v)] <- (D1$v[!is.na(D1$v)]*n1)/X$n # Intensidad para simular
# un patrón puntual X1, obtenida al multiplicar la densidad estimada para el
# patrón X por (n1/n)
D2$v[!is.na(D2$v)] <- (D2$v[!is.na(D2$v)]*n2)/X$n # Intensidad para simular
# un patrón puntual X2, obtenida al multiplicar la densidad estimada para el
# patrón X por (n2/n)

# Función para obtener el estadístico T Cramér Von Mises
T_test <- function(x.boot.1,x.boot.2, H.1, H.2){
  kde.test(x1 = x.boot.1, x2 = x.boot.2, H1 = H.1, H2 = H.2)$Tstat
}

# Rutina bootstrap para general m replicaciones de patrones puntuales x1*
# y x2*, estimar sus matrices ancho de banda plug-in y calcular el
# estadístico T*
replicate(m, {
  x1 <- rpoint(n = n1, f = D1, win = wind, types = "pixel image"
    , nsim=1, drop=TRUE)
  df1 <- as.data.frame(cbind(x1$x, x1$y))
  Hpi1 <- Hpi(x = df1)

  x2 <- rpoint(n = n2, f = D2, win = wind, types = "pixel image"
    , nsim=1, drop=TRUE)
  df2<- cbind(x2$x, x2$y)
  Hpi2 <- Hpi(x = df2)

  T_test(x.boot.1 = df1, x.boot.2 = df2, H.1 = Hpi1, H.2 = Hpi2)
})

```

```

}

# Vector de 99 replicaciones de estadísticos T* simulados, con "X_full" el
# patrón observado de robos en CABA durante 2020, y "caba_limites_owin" la
# región observada (CABA).
T_vector <- simtest.boot(X_full, X_con_arma$n, X_sin_arma$n,
                        caba_limites_owin, m = 99)

# Función para obtener el estadístico T observado, con X1="Robos con arma" y
# X2="Robos sin arma", con H1 y H2 las matrices ancho de banda llenas plug-in
# respectivas.
T_obs <- kde.test(x1 = df_con_arma, x2 = df_sin_arma,
                  H1 = Hpi1, H2 = Hpi2)$Tstat

# Valor-p empírico, obtenido al dividir la fracción de T* simulados mayores al
# T obs, dividido por el total de replicaciones+1.
p_value <- (1 + sum(T_vector > T_obs))/(1 + length(T_vector))

```

A.2. Test de hipótesis de AETC

Sección 2.4.3

```

library(ks)
library(spatstat)
library(stpp)

# Función que transmora un objeto ppp en un data.frame con las coordenadas
# de los eventos

pp_to_df <- function(X_pp){
  # X_pp .....Patrón puntual observado (formato ppp)
  df <- data.frame(x = X_pp$x, y = X_pp$y, t = X_pp$marks)

```

```

return(df)
}

# Función que transforma un objeto owin en un data.frame con las coordenadas
# de los bordes
win_to_coord <- function(wind){
  # wind .....Ventana de la región de interes (formato owin)
  df_coord <- data.frame(x = wind$bdry[[1]]$x,
                        y = wind$bdry[[1]]$y)
  return(df_coord)
}
win_to_coord(caba_limites_owin2)

# Función que simula patrones espacio temporales con intensidad e-t estimada
# a partir de los datos
sim_et_pp <- function(den_array, t.reg, wind, ...){
  # den_array .....Densidad espacio temporal estimada para el patrón
  # observado (formato array)
  # t.reg .....Vector con el mínimo y máximo de las marcas temporales
  # wind .....Ventana de la región de interes (formato owin)

  s.reg <- win_to_coord(wind)
  et_stpp <- rpp(lambda = den_array, s.region = s.reg, t.region = t.reg,
                discrete.time = T)
  et_pp <- ppp(et_stpp$xyt[, 1], y = et_stpp$xyt[, 2], window = wind,
              marks = et_stpp$xyt[, 3])
  return(et_pp)}

# Función que estima la función K espacio temporal no homogénea del patrón observado
kinhom_et_hat <- function(X, r = NULL, t = NULL){
  # X .....Patrón puntual observado (formato ppp)

```

```

# r .....Vector de distancias a estimar
# t .....Vector de tiempos a estimar

### Estima la función de intensidad no separable en los eventos observados
intensityST.nonsep.points <- function(X, sigma.t=NULL,
                                     sigma.s1=NULL, sigma.s2=NULL,
                                     start.time=NULL, end.time=NULL){
  if (is.null(start.time)){start.time <- min(X$marks)}
  if (is.null(end.time)){end.time <- max(X$marks)}

  # Proyección espacial del patrón puntual
  Xspace <- unmark(X)

  # Tiempos de los eventos
  ts <- marks(X)

  # Factores de corrección en el borde (espacial)
  win <- Xspace$window
  if (win$type == "rectangle") { # rectangular window
    xr <- win$xrange
    yr <- win$yrange
    xx <- Xspace$x
    yy <- Xspace$y
    xprob <- pnorm(xr[2], mean = xx, sd = sigma.s1) -
      pnorm(xr[1], mean = xx, sd = sigma.s1)
    yprob <- pnorm(yr[2], mean = yy, sd = sigma.s2) -
      pnorm(yr[1], mean = yy, sd = sigma.s2)
    edgewt.s <- xprob * yprob
  } else {
    edg <- second.moment.calc(Xspace, varcov=c(sigma.s1^2,sigma.s2^2)*diag(2),
                              kernel = "gaussian",

```

```

                                scalekernel = TRUE, what = "edge")

  edgewt.s <- safelookup(edg, Xspace, warn = FALSE)
}

# Factores de corrección en el borde (temporal)
edgewt.t <- pnorm((end.time-ts)/sigma.t) - pnorm((start.time-ts)/sigma.t)

# Estimación de la función de intensidad
int.out <- rep(NA, times=X$n)

for (i in 1:X$n){
  xi <- X$x[i]
  yi <- X$y[i]
  ti <- X$marks[i]

  k1 <- dnorm(X$x, mean=xi, sd=sigma.s1)*
    dnorm(X$y, mean=yi, sd=sigma.s2)/edgewt.s
  k2 <- dnorm(X$marks, mean=ti, sd=sigma.t)/edgewt.t

  int.out[i] <- sum(k1*k2)
}

# Vector de valores, con las intensidades estimadas para cada evento
return(int.out)
}

# Ancho de banda temporal
sigma_t <- bw.SJ(marks(X))

# Matriz ancho de banda plug-in llena (espacial)
Hpi_diag <- Hpi.diag(pp_to_df(X)[, 1:2])

```

```
# Estimación de la intensidad espacio temporal no separable, para el  
# patrón puntual observado  
D_et <- intensityST.nonsep.points(X, sigma.t=sigma_t,  
                                sigma.s1=Hpi_diag[1,1],  
                                sigma.s2=Hpi_diag[2,2])  
  
# Estimación de la función K espacio temporal no homogénea para el  
# patrón observado.  
K_et_con_arma <- STIKhat(pp_to_3d(X), s.region = win_to_coord(X$window),  
                        t.region = range(marks(X)),  
                        dist = r, times = t, lambda = D_et,  
                        infectious = F)  
  
return(K_et_con_arma)  
}
```

Bibliografía

Abramson, I.S., 1982. On bandwidth variation in kernel estimates-a square root law. The annals of Statistics 1217–1223.

Baddeley, A.J., Møller, J., Waagepetersen, R., 2000. Non-and semi-parametric estimation of interaction in inhomogeneous point patterns. Statistica Neerlandica 54, 329–350.

Baddeley, A., Rubak, E., Turner, R., 2015. Spatial point patterns: Methodology and applications with r. CRC press.

Besag, J., 1977. Contribution to the discussion on dr ripley's paper. JR Stat. Soc. 39, 193–195.

Besag, J., Diggle, P.J., 1977. Simple monte carlo tests for spatial pattern. Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics) 26, 327–333.

Bithell, J.F., 1990. An application of density estimation to geographical epidemiology. Statistics in medicine 9, 691–701.

Bowers, K.J., Johnson, S.D., Pease, K., 2004. Prospective hot-spotting: The future of crime mapping? British journal of criminology 44, 641–658.

Brantingham, P., Brantingham, P., 2010. Environment, routine, and situation: Toward a pattern theory of crime (1993), in: Classics in Environmental Criminology. Routledge, pp. 381–410.

Breiman, L., Meisel, W., Purcell, E., 1977. Variable kernel estimates of multivariate densities. Technometrics 19, 135–144.

Burrough, P.A., McDonnell, R.A., Lloyd, C.D., 2015. Principles of geographical information systems. Oxford university press.

CABA, 2020. Informe de estadística criminal 2020. Ministerio de Justicia y Seguridad. Subsecretaría

de Seguridad Comunal e Investigación Criminal.

Campos, F.A., Fedigan, L.M., 2014. Spatial ecology of perceived predation risk and vigilance behavior in white-faced capuchins. *Behavioral Ecology* 25, 477–486.

Chacón, J.E., Duong, T., 2010. Multivariate plug-in bandwidth selection with unconstrained pilot bandwidth matrices. *Test* 19, 375–398.

Chainey, S., Ratcliffe, J., 2013. GIS and crime mapping. John Wiley & Sons.

Chainey, S., Tompson, L., Uhlig, S., 2008. The utility of hotspot mapping for predicting spatial patterns of crime. *Security journal* 21, 4–28.

Cid Ferreira, L., Lorenzo Pisarello, M., Laks, R., 2017. Observaciones sobre el delito en relación con los contextos económicos en la argentina contemporánea, in: I Jornadas de Estudios Sociales Sobre Delito, Violencia Y Polici'a (La Plata Y Quilmes, Argentina, 20 Y 21 de Abril de 2017).

Cucala, L., 2006. Espacements bidimensionnels et données entachées d'erreurs dans l'analyse des processus ponctuels spatiaux (PhD thesis). Université des Sciences Sociales-Toulouse I.

Davies, T.M., Cornwall, J., Sheard, P.W., 2013. Modelling dichotomously marked muscle fibre configurations. *Statistics in medicine* 32, 4240–4258.

Davies, T.M., Hazelton, M.L., 2010. Adaptive kernel estimation of spatial relative risk. *Statistics in Medicine* 29, 2423–2437.

Davies, T.M., Jones, K., Hazelton, M.L., 2016. Symmetric adaptive smoothing regimens for estimation of the spatial relative risk function. *Computational Statistics & Data Analysis* 101, 12–28.

Davies, T.M., Marshall, J.C., Hazelton, M.L., 2018. Tutorial on kernel estimation of continuous spatial and spatiotemporal relative risk. *Statistics in medicine* 37, 1191–1221.

Diggle, P.J., 2013. Statistical analysis of spatial and spatio-temporal point patterns. CRC press.

Díaz-Avalos, C., Juan, P., Mateu, J., 2013. Similarity measures of conditional intensity functions to test separability in multidimensional point processes. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 27, 1193–1205.

Duong, T., Duong, M.T., Suggests, M., 2021. Package “ks”.

- Duong, T., Goud, B., Schauer, K., 2012. Closed-form density-based framework for automatic detection of cellular morphology changes. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 109, 8382–8387.
- Duong, T., Hazelton, M., 2003. Plug-in bandwidth matrices for bivariate kernel density estimation. *Journal of Nonparametric Statistics* 15, 17–30.
- Duong, T., Hazelton, M.L., 2005. Cross-validation bandwidth matrices for multivariate kernel density estimation. *Scandinavian Journal of Statistics* 32, 485–506.
- Fuentes-Santos, I., González-Manteiga, W., Mateu, J., 2018. A first-order, ratio-based nonparametric separability test for spatiotemporal point processes. *Environmetrics* 29, e2482.
- Fuentes-Santos, I., González-Manteiga, W., Mateu, J., 2017. A nonparametric test for the comparison of first-order structures of spatial point processes. *Spatial Statistics* 22, 240–260.
- Fuentes-Santos, I., González-Manteiga, W., Mateu, J., 2016. Consistent smooth bootstrap kernel intensity estimation for inhomogeneous spatial poisson point processes. *Scandinavian Journal of Statistics* 43, 416–435.
- Fuentes-Santos, I., González-Manteiga, W., Zubelli, J., 2021. Nonparametric spatiotemporal analysis of violent crime. A case study in the rio de janeiro metropolitan area. *Spatial Statistics* 42, 100431.
- Gabriel, E., Diggle, P.J., 2009. Second-order analysis of inhomogeneous spatio-temporal point process data. *Statistica Neerlandica* 63, 43–51.
- Gerber, M.S., 2014. Predicting crime using twitter and kernel density estimation. *Decision Support Systems* 61, 115–125.
- Ghorbani, M., Vafaei, N., Dvořák, J., Myllymäki, M., 2021. Testing the first-order separability hypothesis for spatio-temporal point patterns. *Computational Statistics & Data Analysis* 161, 107245.
- Ian, H., 2010. An introduction to geographical information systems. Pearson Education India.
- Illian, J., Penttinen, A., Stoyan, H., Stoyan, D., 2008. Statistical analysis and modelling of spatial point patterns. John Wiley & Sons.

- Johnson, S.D., 2008. Repeat burglary victimisation: A tale of two theories. *Journal of Experimental Criminology* 4, 215–240.
- Johnson, S.D., Bernasco, W., Bowers, K.J., Elffers, H., Ratcliffe, J., Rengert, G., Townsley, M., 2007. Space–time patterns of risk: A cross national assessment of residential burglary victimization. *Journal of Quantitative Criminology* 23, 201–219.
- Jones, M.C., Marron, J.S., Sheather, S.J., 1996. A brief survey of bandwidth selection for density estimation. *Journal of the American statistical association* 91, 401–407.
- Kelsall, J.E., Diggle, P.J., others, 1995. Kernel estimation of relative risk. *Bernoulli* 1, 3–16.
- Kennedy, L.W., Caplan, J.M., Piza, E., 2011a. Risk clusters, hotspots, and spatial intelligence: Risk terrain modeling as an algorithm for police resource allocation strategies. *Journal of quantitative criminology* 27, 339–362.
- Kennedy, L.W., Caplan, J.M., Piza, E., 2011b. Risk clusters, hotspots, and spatial intelligence: Risk terrain modeling as an algorithm for police resource allocation strategies. *Journal of quantitative criminology* 27, 339–362.
- La Ruffa, S.P., 2019. Informe sobre seguridad pública en la ciudad de buenos aires (2016-2018): Primeras aproximaciones. *Cartografi'as del Sur Revista de Ciencias Artes y Tecnologi'a* 148–168.
- Loeffler, C., Flaxman, S., 2018. Is gun violence contagious? A spatiotemporal test. *Journal of quantitative criminology* 34, 999–1017.
- Mohler, G., 2014. Marked point process hotspot maps for homicide and gun crime prediction in chicago. *International Journal of Forecasting* 30, 491–497.
- Mohler, G.O., Short, M.B., Brantingham, P.J., Schoenberg, F.P., Tita, G.E., 2011. Self-exciting point process modeling of crime. *Journal of the American Statistical Association* 106, 100–108.
- Mosher, C.J., Miethe, T.D., Hart, T.C., 2010. *The mismeasure of crime*. Sage Publications.
- Myllymäki, M., Mrkvička, T., 2019. GET: Global envelopes in r. *arXiv preprint arXiv:1911.06583*.
- Myllymäki, M., Mrkvička, T., Grabarnik, P., Seijo, H., Hahn, U., 2017. Global envelope tests for spatial processes. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 79, 381–404.

- Ogata, Y., 1998a. Space-time point-process models for earthquake occurrences. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 50, 379–402.
- Ogata, Y., 1998b. Space-time point-process models for earthquake occurrences. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 50, 379–402.
- R Core Team, 2021. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Reinhart, A., 2018. A review of self-exciting spatio-temporal point processes and their applications. *Statistical Science* 33, 299–318.
- Ripley, B.D., 1979. Tests of 'randomness' for spatial point patterns. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 41, 368–374.
- Ripley, B.D., 1977. Modelling spatial patterns. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 39, 172–192.
- Ripley, B.D., 1976. The second-order analysis of stationary point processes. *Journal of applied probability* 13, 255–266.
- Rudemo, M., 1982. Empirical choice of histograms and kernel density estimators. *Scandinavian Journal of Statistics* 65–78.
- Sain, S.R., Baggerly, K.A., Scott, D.W., 1994. Cross-validation of multivariate densities. *Journal of the American Statistical Association* 89, 807–817.
- Schoenberg, F.P., 2004. Testing separability in spatial-temporal marked point processes. *Biometrics* 471–481.
- Scott, D.W., 1985. Averaged shifted histograms: Effective nonparametric density estimators in several dimensions. *The Annals of Statistics* 1024–1040.
- Sheather, S.J., Jones, M.C., 1991. A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 53, 683–690.
- Silverman, B., 1978. Choosing the window width when estimating a density. *Biometrika* 65, 1–11.
- Silverman, B.W., 1998. Density estimation for statistics and data analysis. Routledge.

- Smith, B.A., Davies, T.M., Higham, C.F., 2015. Spatial and social variables in the bronze age phase 4 cemetery of ban non wat, northeast thailand. *Journal of Archaeological Science: Reports* 4, 362–370.
- Taddy, M.A., 2010. Autoregressive mixture models for dynamic spatial poisson processes: Application to tracking intensity of violent crime. *Journal of the American Statistical Association* 105, 1403–1417.
- Wand, M., 1992. Error analysis for general multivariate kernel estimators. *Journal of Nonparametric Statistics* 2, 1–15.
- Wand, M.P., Jones, M.C., 1994. Kernel smoothing. CRC press.
- Wooditch, A., Weisburd, D., 2016. Using space–time analysis to evaluate criminal justice programs: An application to stop-question-frisk practices. *Journal of quantitative criminology* 32, 191–213.
- Woodworth, J., Mohler, G., Bertozzi, A.L., Brantingham, P., 2014. Non-local crime density estimation incorporating housing information. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 372, 20130403.
- Zheng, P., 2004. Edge correction for spatial kernel smoothing methods? When is it necessary? *GISVET'04* 40.