Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile







Magíster en Matemática
Mención Estadística

El enfoque martingala para caracterizar caminatas aleatorias con dependencia fuerte

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Estadística del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Estadística de la Universidad del Bío-Bío.

por Ranghely Hernández

Director: Dr. Manuel González Navarrete

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Título: El enfoque martingala para caracterizar caminatas aleatorias con dependencia fuerte

por

Ranghely Hernández

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Estadística del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Estadística de la Universidad del Bío-Bío.

Aprobada por:

Dr. Manuel González Navarrete
Director
Departamento de Estadística, Universidad del Bío-Bío

Dr. Christian Caamaño
Profesor Informante
Departamento de Estadística, Universidad del Bío-Bío

Dr. Rodrigo Lambert
Profesor Informante Externo
Departamento de Estadística, Universidad Federal de Uberlandia, Brasil.

Universidad del Bío-Bío
Facultad de Ciencias
Departamento de Estadística

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

A Dios y a mis padres

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Agradecimientos

A **Dios** primeramente por haber sido tan generoso conmigo, porque a pesar de las muchas dificultades que he tenido el ha sabido darme las fuerzas para seguir adelante, brindándome una maravillosa familia que siempre estuvo y estará presente.

A mi **madre**, por ser mi principal apoyo, no se como podría agradecerte todo lo que me has dado, siempre estando atenta a que nunca me faltara nada, dedicando cada desvelo al progreso de sus hijos, infinitamente gracias por ser mi principal impulso.

A mi **padre**, por haberme dado la vida y esfuerzo, por la confianza depositada en mi, por estar a mi lado en todo momento, por todos esos sacrificios que hiciste por mi, para lograr que sea una profesional.

A mis **hermanos**, por su apoyo incondicional, sabiendome guiar cuando he tropezado.

A mi tutor **Manuel Gonzalez**, por ser un gran mentor, a el gracias por aceptar ser mi tutor no hay nada má gratificante que trabajar con alguien al que admiras por su constancia, grandes conocimientos, por su paciencia, por sacar tiempo de su tan ilimitado itinerario.

Al profesor **Luis Villada**, gran profesor, por preocuparse por cada uno de sus estudiantes, por ser parte de los grandes profesores que impulsan a nunca perder de vista los objetivos.

A todos los que conforman el comité de magister de la **Universidad del Bio Bio**, por su gran apoyo y colaboración a cada uno de sus estudiantes, sin ellos mis metas no fuesen sido posible.

Y a todos aquellos que de una u otra forma colaboraron conmigo.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

RESUMEN

El propósito de esta tesis es proponer un modelo de paseo aleatorio unidimensional en tiempo discreto con memoria infinita, similar al paseo aleatorio del elefante, con detenciones y una tendencia aleatoria a decidir independientemente del pasado. Caracterizaremos el comportamiento asintótico de la caminata aleatoria unidimensional S_n, que define la posición del caminante en el tiempo n mediante un enfoque de martingala, exhibiendo una transición de fase de comportamiento difusivo a superdifusivo. Demostramos una ley de los grandes números y un teorema del límite central. Sorprendentemente, el teorema del límite central se aplica no solo al régimen difusivo sino también al punto de transición de fase que es superdifusivo. Dentro del régimen superdifusivo, el modelo propuesto converge a una variable aleatoria W no degenerada que no es normal. Así mismo obtenemos expresiones explícitas para las correlaciones de incrementos de este modelo.

Palabras Claves: Paseo del elefante, tendencia aleatoria, enfoque martingala.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to propose a discrete-time one-dimensional random walk with infinite memory as the Elephant random walk, with delays and random tendency. We will characterize the asymptotic behavior of the one-dimensional random walk S_n, which defines the position of the walker at time n of this, via a martingale approach. The model exhibits a phase transition from diffusive to superdiffusive behaviour. We prove a law of large numbers and a central limit theorem. Remarkably the central limit theorem applies not only to the diffusive regime but also to the phase transition point which is superdiffusive. In the superdiffusive regime the proposed model converges to a non-degenerate random W variable which is not normal. We also obtain explicit expressions for the correlations of the increments of this model.

Key Words: Elephant random, random tendency, martingale approach.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Índice general

1. Introducción **1**

2. Objetivos **5**
2.1. Objetivo General 5
2.2. Objetivos Específicos 5
2.3. Hipótesis 5

3. Metodología **7**

4. Modelo propuesto **9**

5. Teoremas principales **11**

6. Resultados preliminares **13**

7. Demostraciones **21**
7.1. Demostración del Teorema 1 21
7.2. Demostración del Teorema 2 22
7.3. Demostración del Teorema 3 29

8. Conclusiones **31**

9. Apendice **33**

Referencias **36**

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 1

Introducción

En el área de la física matemática ha cobrado vital relevancia el estudio de dinámicas aleatorias que combinen simplicidad en su definición y complejidad en sus comportamientos. En este sentido, un buen ejemplo es la llamada "caminata aleatoria del elefante", abreviada ERW por sus siglas en inglés. Este modelo fue propuesto por Schutz and Trimper [22] y podemos definirlo de la siguiente manera. Sea la secuencia $\{X_1, X_2, \ldots\}$ donde $X_i \in \{-1, +1\}$, para todo $i \geq 1$. La posición del elefante al instante n es dada por $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, y $S_0 = 0$. Se asume que el elefante recuerda completamente su pasado y realiza el $(n+1)$-movimiento escogiendo $t \in \{1, ...n\}$ uniformemente, entonces

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_t & , \text{con probabilidad } p, \\ -X_t & , \text{con probabilidad } 1-p. \end{cases}$$

donde $p \in [0, 1]$ es un parametro. En otra palabras, a cada nuevo movimiento, el elefante selecciona un instante del pasado y decide repetir el mismo movimiento con probabilidad p o realizar lo opuesto con probabilidad $1 - p$.

En la literatura reciente se han publicado diversos artículos que caracterizan el comportamiento asintótico de este modelo. Esto es, por ejemplo, se ha obtenido una ley de los grandes números, un teorema central del límite, ley del logaritmo iterado, entre otros (ver [1, 2, 4, 6, 8, 9, 13, 20]).

La principal característica del ERW es la existencia de una transición de fase desde un comportamiento difusivo a uno superdifusivo. Esto se refiere a que el segundo momento de la posición de la caminata, se escala de forma lineal (difusivo) o como una ley de potencia (superdifusivo). Este hecho ha motivado el desarrollo de nuevos modelos que generalizan el llamado ERW. Por ejemplo, los trabajos de Bercu y Laulin [3], Bertoin [5], González-Navarrete y Lambert [11, 14] y Gut y Stadtmüller [15].

El presente trabajo es motivado por la formulación propuesta en [16], artículo que define una caminata aleatoria al estilo elefante, pero que incluye posibles de-

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

tenciones (o retrasos). Los detalles de nuestro modelo se encuentran en el Capítulo 4, y destacamos la existencia de lapsos de memoria en la dinámica de la caminata aleatoria, este tipo de evolución fue introducido en [13].

Nuestro objetivo es caracterizar los comportamientos asintóticos del modelo propuesto. Particularmente, se busca probar una ley de los grandes números y caracterizar las regiones difusivas y superdifusivas con sus respectivos resultados de convergencia en distribución.

La técnica que se emplea es basada en el enfoque de martingala propuesto por [2]. En este sentido, la definición del concepto es dada a seguir:

Definición 1.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad para modelar un cierto experimento aleatorio. La filtración $\mathcal{F}$ es la estructura que agrupa a los eventos del experimento aleatorio a los cuales se les puede calcular su probabilidad, tambien llamada σ-algebra. En generalmente, puede considerarse una sucesión no decreciente de sub σ-algebras $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \cdots$ Este tipo de estructuras surgen de manera natural, por ejemplo, para un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n \geq 1\}$, pues puede construirse la sucesión $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ de la siguiente forma:*

$$\mathcal{F} = \sigma\{X_1, X_2, \ldots\}$$

En donde efectivamente se cumple que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \cdots$ En este caso la σ-algebra $\mathcal{F}_n$ contiene los eventos para los cuales puede determinarse su ocurrencia o no ocurrencia, sólo con la información o historia del proceso hasta el tiempo n.

Definición 1.2. *Se dice que un proceso a tiempo discreto $\{Xn : n \geq 1\}$ es una martingala respecto de una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ si cumple las siguiente tres condiciones:*

a) Es integrable.

b) Es adaptado a la filtración.

c) Para cualquier $m \leq n$

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \text{ c.s}$$

Example 1.3. *Sea un proceso de Poisson de parámetro λ, un ejemplo de martingala está dado por el proceso centralizado $M_t = \{X_t - \lambda t : t \geq 0\}$.En efecto este nuevo proceso es integrable y adaptado. Además para cada $0 \geq s \geq t$,*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t - \lambda t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] - \lambda t \\
&= \mathbb{E}[X_t - X_s + X_s|\mathcal{F}_s] - \lambda t \\
&= \mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] + X_s - \lambda t \\
&= \lambda(t-s) + X_s - \lambda t \\
&= X_s - \lambda s \\
&= M_s
\end{aligned}$$

De esta manera, en el presente trabajo probaremos la existencia de una martingala asociada al modelo propuesto y con ello construíremos las demostraciones de tres teoremas principales incluídos en el Capítulo 5.

El texto incluye los objetivos del trabajo, en el Capítulo 2. La metodología empleada se encuentra en el Capítulo 3. El Capítulo 4 presenta la formulación matemática del modelo propuesto. En el Capítulo 5 exponemos los teoremas principales del trabajo. El Capítulo 6 incluye algunos resultados preliminares a ser utilizados en las demostraciones que se encuentran en el Capítulo 7. Finalmente se expresan conclusiones en el Capítulo 8. Además de un Apendice con resultados clásicos utilizados en las demostraciones.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 2

Objetivos

En este capítulo describiremos los objetivos de la tesis en estudio.

2.1. Objetivo General

Proponer un modelo tipo caminata aleatoria del elefante con detenciones y dependencia fuerte para caracterizar su comportamiento asintótico con un enfoque matingala.

2.2. Objetivos Específicos

- Generalizar el modelo propuesto por Gut y Stadtmüller en [16].
- Demostrar la existencia de una martingala para el modelo propuesto.
- Probar resultados del tipo ley de los grandes números, teorema central del límite basados en el enfoque martingala.

2.3. Hipótesis

- Es posible caracterizar asintóticamente el modelo propuesto mediante herramientas de martingalas.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 3

Metodología

Con el objetivo de comprender los resultados existentes en la literatura, proponemos la lectura de diversos artículos de referencia para comprender comportamientos asintóticos para procesos con dependencia fuerte, por ejemplo [12, 13, 14]. En este sentido, se requiere revisar las herramientas para Martingalas [2, 3, 11, 17, 20, 21], comprendiendo el procedimiento matemático realizado. Destacamos que el simple hecho de adquirir nociones del comportamiento teórico que visamos probar analíticamente son importantes para el área de probabilidad.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 4

Modelo propuesto

Los autores Gut y Stadtmüller en [16] proponen que el paseo del elefante (ERW) en [3] tenga una memoria definida a continuación:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_t & , \text{ con probabilidad } p, \\ -X_t & , \text{ con probabilidad } q, \\ 0 & , \text{ con probabilidad } r. \end{cases} \tag{4.1}$$

Donde $p + q + r = 1$ y t tiene distribución uniforme en $\{1, 2, \dots n\}$.

Basados en (4.1) proponemos un modelo con tendencia aleatoria como el descrito en [11]. A cada instante $n \geq 1$, sorteamos una variable aleatoria Y_n Bernoulli con parametro θ tal que para $Y_n = 0$ el caminante decide de forma independiente del pasado, y si $Y_n = 1$ el caminante sigue la dinámica del elefante con detenciones propuesta en (4.1).

Definamos el primer paso X_1 del caminante como:

$$X_1 = \begin{cases} +1 & , \text{ con probabilidad } p, \\ -1 & , \text{ con probabilidad } q, \\ 0 & , \text{ con probabilidad } r. \end{cases} \tag{4.2}$$

Sea $\mathcal{F}_n$ la σ-algebra generada por $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, para todo $n = 1, 2, \dots$ se definen las siguientes probabilidades condicionales para $Y_n = 0$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = +1 | \mathcal{F}_n, Y_n = 0) = p \\ &\mathbb{P}(X_{n+1} = -1 | \mathcal{F}_n, Y_n = 0) = q \\ &\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | \mathcal{F}_n, Y_n = 0) = r \end{aligned} \tag{4.3}$$

En el caso de $Y_n = 1$ tendremos las siguientes probabilidades condicionales:

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = +1|\mathcal{F}_n, Y_n = 1) &= \frac{N(1,n)}{n} \cdot p + \frac{N(-1,n)}{n} \cdot q \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = -1|\mathcal{F}_n, Y_n = 1) &= \frac{N(-1,n)}{n} \cdot p + \frac{N(1,n)}{n} \cdot q \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = 0|\mathcal{F}_n, Y_n = 1) &= \frac{N(0,n)}{n} \cdot (p+q) + r
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Donde $N(1,n)$ simboliza la cantidad de pasos dados en la dirección $+1$ hasta el n-esimo momento, de forma similar $N(-1,n)$ y $N(0,n)$ simbolizan la cantidad de pasos en dirección -1 y 0 hasta el n-esimo momento respectivamente.

Utilizando la ley de probabilidad total y las ecuaciones (4.3) y (4.4), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = +1|\mathcal{F}_n) &= \left[\frac{N(1,n)}{n} \cdot p + \frac{N(-1,n)}{n} \cdot q\right] \cdot \theta + (1-\theta) \cdot p \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = -1|\mathcal{F}_n) &= \left[\frac{N(-1,n)}{n} \cdot p + \frac{N(1,n)}{n} \cdot q\right] \cdot \theta + (1-\theta) \cdot q \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = 0|\mathcal{F}_n) &= \left[\frac{N(0,n)}{n} \cdot (p+q) + r\right] \cdot \theta + (1-\theta) \cdot r \\
&= \frac{N(0,n)}{n} \cdot (p+q) \cdot \theta + r
\end{aligned} \tag{4.5}$$

La secuencia $\{X_i\}$ genera una caminata aleatoria unidimensional S_n dada por:

$$S_0 := 0 \quad \text{y} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = N(+1,n) - N(-1,n) \quad \forall n = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 5

Teoremas principales

En este capítulo presentaremos los Teoremas principales de estudio.

Teorema 5.1 (Ley fuerte de los grandes números)**.** *Tomando el modelo definido en* (4.5) *para todo* $\alpha \in [0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0 \quad c.s \ [1] \tag{5.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{\omega}{1-\alpha} \quad c.s \tag{5.2}$$

Donde $\omega = (1-\theta)(p-q)$ y $\alpha = (p-q)\cdot\theta$.

Teorema 5.2. *Tomando el modelo definido en* (4.5) *se tiene que:*

i) Si $0 \leq \alpha < 1/2$*, entonces*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\frac{\phi\cdot n}{1-2\alpha}}} \xrightarrow{d} [2] N(0,1) \tag{5.3}$$

Donde $\phi = \frac{\tau}{1-\gamma} - \left(\frac{\omega}{1-\alpha}\right)^2$, $\tau = (1-\theta)(p+q)$ *y* $\gamma = (p+q)\theta$

ii) Si $\alpha = 1/2$*, entonces*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\phi \cdot n \cdot logn}} \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{5.4}$$

Donde $\phi = \frac{\tau}{1-\gamma} - \left(\frac{\omega}{1-\alpha}\right)^2$, $\tau = (1-\theta)(p+q)$ *y* $\gamma = (p+q)\theta$

[1] $c.s$ Simboliza convergencia casi segura

[2] $\xrightarrow{d}$ Simboliza convergencia en distribución

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

iii) Si $1/2 < \alpha < 1$, *existe una variable aleatoria* W *con varianza positiva tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n} = W \quad c.s \quad y \ en \quad L^2 \tag{5.5}$$

Teorema 5.3. *Bajo las condiciones del Teorema 5.2, item (iii), se tiene:*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n] - W \cdot a_n}{\sqrt{\frac{\phi}{2\alpha - 1} n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{5.6}$$

Donde $\omega = (1-\theta)(p-q)$ *y* $\alpha = (p-q)\cdot\theta$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 6

Resultados preliminares

En esta sección mencionaremos algunos cálculos, definiciones y Lemas previos a las demostraciones de los teoremas principales, como lo son:

Definición 6.1. *La esperanza condicional de X_{n+1} dado S_n es:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}|S_n) &= 1\cdot\mathbb{P}(X_{n+1}=1|\mathcal{F}_n) - 1\cdot\mathbb{P}(X_{n+1}=-1|\mathcal{F}_n) + 0\cdot\mathbb{P}(X_{n+1}=0|\mathcal{F}_n) \\
&= \left[\frac{N(1,n)}{n}\cdot p + \frac{N(-1,n)}{n}\cdot q\right]\cdot\theta + (1-\theta)\cdot p \\
&\quad - \left[\left(\frac{N(-1,n)}{n}\cdot p + \frac{N(1,n)}{n}\cdot q\right)\cdot\theta + (1-\theta)\cdot q\right] \\
&= \left[\frac{N(1,n)-N(-1,n)}{n}\cdot p + \frac{N(-1,n)-N(1,n)}{n}\cdot q\right]\cdot\theta \\
&\quad +(1-\theta)\cdot p - (1-\theta)\cdot q \\
&= \frac{(p-q)\cdot\theta}{n}\cdot S_n + (1-\theta)\cdot(p-q)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Definición 6.2. *La esperanza condicional de S_{n+1} dado S_n es:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}|S_n) &= \mathbb{E}(S_n + X_{n+1}|S_n) \\
&= \mathbb{E}(X_{n+1}|S_n) + S_n \\
&= \frac{(p-q)\cdot\theta}{n}\cdot S_n + (1-\theta)\cdot(p-q) + S_n \\
&= \lambda_n S_n + \omega
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Donde $\lambda_n = 1 + \dfrac{\alpha}{n}$ *con* $\alpha = (p-q)\cdot\theta$ *y* $\omega = (1-\theta)\cdot(p-q)$.

Definamos

$$M_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} \quad para \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6.3}$$

Con

$$a_1 := 1 \quad a_n := \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)\cdot\Gamma(\alpha+1)} \quad para \quad n = 2, \ldots \tag{6.4}$$

Por la fórmula de Stirling para la función gamma

$$a_n \sim \tfrac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad cuando \quad n \to \infty \tag{6.5}$$

Lema 6.3. *La secuencia* $\{M_n\}$ *es una martingala cuadráticamente integrable*

Demostración Veamos que $\{M_n\}$ es una martingala, en efecto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left[\tfrac{S_{n+1}-\mathbb{E}(S_{n+1})}{a_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\tfrac{S_n+X_{n+1}-\mathbb{E}(S_n+X_{n+1})}{a_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \tfrac{S_n}{a_{n+1}} + \tfrac{\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]}{a_{n+1}} - \tfrac{\mathbb{E}(S_n)}{a_{n+1}} - \tfrac{\mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)]}{a_{n+1}} \\
&= \tfrac{S_n}{a_{n+1}} + \tfrac{\alpha S_n}{n a_{n+1}} + \tfrac{\omega}{a_{n+1}} - \tfrac{\mathbb{E}(S_n)}{a_{n+1}} - \tfrac{\alpha\mathbb{E}(S_n)}{n a_{n+1}} - \tfrac{\omega}{a_{n+1}} \\
&= \tfrac{nS_n+\alpha S_n - n\mathbb{E}(S_n) - \alpha\mathbb{E}(S_n)}{n a_{n+1}} \\
&= \tfrac{(n+\alpha)(S_n-\mathbb{E}(S_n))}{n\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)a_n} \\
&= \tfrac{S_n-\mathbb{E}(S_n)}{a_n} \\
&= M_n
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Además, para cualquier $n \geq 1$, X_n es una variable aleatoria que toma valores en $\{+1, 0, -1\}$. En consecuencia, $|S_n| \leq n$, lo que implica que (M_n) es cuadraticamente integrable localmente.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Lema 6.4 (Forma aditiva de la martingala)**.** *La martingala* (M_n) *puede ser reescrita en la forma aditiva*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta M_n = \sum_{k=1}^{n-1} (M_n - M_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\xi_n}{a_k} \tag{6.7}$$

Donde $\xi_n = X_n - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})$

Demostración

Para verificar esto calculemos primero la siguiente esperanza:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n - \lambda_{n-1} S_{n-1}) &= \mathbb{E}\left[S_{n-1} + X_n - \left(1 + \tfrac{\alpha}{n-1}\right) S_{n-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_{n-1} + X_n - S_{n-1} - \tfrac{\alpha}{n-1} S_{n-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_n - \tfrac{\alpha}{n-1} S_{n-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_n - \tfrac{\alpha}{n-1} S_{n-1} \middle| S_{n-1}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_n | S_{n-1}\right] - \tfrac{\alpha}{n-1} S_{n-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\tfrac{\alpha}{n-1} S_{n-1} + \omega - \tfrac{\alpha}{n-1} S_{n-1}\right] \\
&= \mathbb{E}[\omega] \\
&= \omega
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Ahora el incremento de las martingalas $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$, utilizando (6.8) resulta:

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\begin{aligned}
\Delta M_n &= \tfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} - \tfrac{S_{n-1} - \mathbb{E}(S_{n-1})}{a_{n-1}} \\
&= \tfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\lambda_{n-1} a_{n-1}} - \tfrac{S_{n-1} - \mathbb{E}(S_{n-1})}{a_{n-1}} \\
&= \tfrac{S_n - \lambda_{n-1} S_{n-1} - (\mathbb{E}[S_n - \lambda_{n-1} S_{n-1}])}{a_n} \\
&= \tfrac{S_n - \lambda_{n-1} S_{n-1} - \omega}{a_n} \\
&= \tfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_{n-1})}{a_n} \\
&= \tfrac{S_{n-1} + X_n - \mathbb{E}(S_{n-1} + X_n | \mathcal{F}_{n-1})}{a_n} \\
&= \tfrac{X_n - \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})}{a_n}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Observación 6.5. *Dado que X_n toma valores $\{-1, 0, 1\}$ es trivial ver que*

$$\frac{|\Delta M_n|}{a_n} \leq \frac{2}{a_n} \tag{6.10}$$

Definición 6.6. *La variación cuadrática predecible asociada a (M_n) es dada por $\langle M \rangle_0 = 0$ y, para todo $n \geq 1$*

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{(X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n))^2}{a_{n+1}^2} | \mathcal{F}_n \right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[(\xi_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n]}{a_{n+1}^2} \tag{6.11}$$

Definición 6.7. *Definamos $Z_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i)^2 = N(+1, n) + N(-1, n)$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, y $\{M_n^*\} = \frac{Z_n - \mathbb{E}[Z_n]}{b_n}$ donde b_n viene dado por:*

$$b_1 := 1 \quad b_n := \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\gamma}{k}\right) = \frac{\Gamma(n + \gamma)}{\Gamma(n) \cdot \Gamma(\gamma + 1)} \quad \textit{para} \quad n = 2, \ldots \tag{6.12}$$

Por la fórmula de Stirling para la función gamma

$$b_n \sim \tfrac{n^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty \tag{6.13}$$

Lema 6.8. *Sea la secuencia $\{M_n^*\}$ es una martingala cuadraticamente integrable*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Demostración Veamos que $\{M_n^*\}$ es una martingala, en efecto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}^*|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left[\tfrac{Z_{n+1}-\mathbb{E}(Z_{n+1})}{b_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\tfrac{Z_n+X_{n+1}^2-\mathbb{E}(Z_n+X_{n+1}^2)}{b_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \tfrac{Z_n}{b_{n+1}} + \tfrac{\mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]}{b_{n+1}} - \tfrac{\mathbb{E}(Z_n)}{b_{n+1}} - \tfrac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)\right]}{b_{n+1}} \\
&= \tfrac{Z_n}{b_{n+1}} + \tfrac{\gamma Z_n}{nb_{n+1}} + \tfrac{\tau}{b_{n+1}} - \tfrac{\mathbb{E}(Z_n)}{b_{n+1}} - \tfrac{\gamma\mathbb{E}(Z_n)}{nb_{n+1}} - \tfrac{\tau}{b_{n+1}} \\
&= \tfrac{nZ_n+\gamma Z_n-n\mathbb{E}(Z_n)-\gamma\mathbb{E}(Z_n)}{nb_{n+1}} \\
&= \tfrac{(n+\gamma)(Z_n-\mathbb{E}(Z_n))}{n\cdot\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)b_n} \\
&= \tfrac{Z_n-\mathbb{E}(Z_n)}{b_n} \\
&= M_n^*
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Además, para cualquier $n \geq 1$, X_n es una variable aleatoria que toma valores en $\{+1, 0, -1\}$. En consecuencia, $|Z_n| \leq n$, lo que implica que (M_n^*) es cuadraticamente integrable localmente.

Lema 6.9. *Para* $n = 1, 2, \ldots,$

$$\mathbb{E}[S_n] = \beta a_n + \omega \cdot a_n \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{a_{l+1}}$$

Demostración
Haremos uso del Lema 9.1, para ello definamos:

$$x_1 = \mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[X_1] = p - q = \beta$$

$$x_{n+1} = E[S_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_{n+1}|S_n]] = \lambda_n \mathbb{E}(S_n) + \omega \text{ por (6.2)}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Tomando $x_1 = f_0 = \beta$, $f_n = \omega, g_n = \lambda_n$ y $x_n = \mathbb{E}(S_n)$ para $n = 1, 2, \ldots$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n] &= \sum_{l=0}^{n-1} f_l \cdot \prod_{k=l+1}^{n-1} \lambda_k \\ &= \beta \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_n + \omega \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=l+1}^{n-1} \lambda_k \\ &= \beta a_n + \omega \cdot a_n \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{a_{l+1}} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Lema 6.10. *Para* $n = 1, 2, \ldots,$

$$\mathbb{E}[Z_n] = \psi b_n + \tau \cdot b_n \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{b_{l+1}}$$

Demostración
Es facil ver que esta demostración es análoga a la del Lema 6.9, de igual forma se hace uso del Lema 9.1, para ello necesitamos definir lo siguiente:

$$\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[(X_1)^2] = p + q = \psi$$

$$x_{n+1} = E[Z_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n+1}|S_n]]$$

Calculemos la esperanza condicional de Z_{n+1} dado S_n:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{n+1}|S_n) &= \mathbb{E}(Z_n + (X_{n+1})^2|S_n) \\ &= \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2|S_n\right) + Z_n \\ &= \frac{\gamma}{n} \cdot Z_n + \tau + Z_n \\ &= \left[1 + \tfrac{\gamma}{n}\right] \cdot Z_n + \tau \\ &= \mu_n Z_n + \tau \end{aligned} \tag{6.16}$$

Donde $\mu_n = 1 + \frac{\gamma}{n}$. Así

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= E[Z_{n+1}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n+1}|S_n]] \\ &= \mathbb{E}[\mu_n Z_n + \tau] \\ &= \mu_n \cdot \mathbb{E}[Z_n] + \tau \end{aligned}$$

Tomando $x_1 = f_0 = \psi$, $f_n = \tau, g_n = \mu_n$ y $x_n = \mathbb{E}(Z_n)$ para $n = 1, 2, \ldots,$, por Lema 9.1

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n] &= \sum_{l=0}^{n-1} f_l \cdot \prod_{k=l+1}^{n-1} \mu_k \\ &= \psi \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \mu_n + \tau \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=l+1}^{n-1} \mu_k \\ &= \psi b_n + \tau \cdot b_n \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{b_{l+1}} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Lema 6.11. *La serie* $\sum \frac{1}{a_n^2}$ *converge si solo si* $\alpha > \frac{1}{2}$

Demostración Sean $C_n = \frac{1}{a_n^2}$ y asuma que $\alpha \neq 1/2$, haciendo uso del criterio de Raabe. Estudiemos la existencia del siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{C_{n+1}}{C_n}\right) = R$$

Así

$$\begin{aligned} n\left(1 - \tfrac{C_{n+1}}{C_n}\right) &= n\left(1 - \tfrac{1}{\lambda_n^2}\right) \\ &= n\left(\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2 - 1}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2}\right) \\ &= n\left(\frac{1+\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}-1}{1+\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}}\right) \\ &= n\left(\frac{\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}}{1+\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}}\right) \end{aligned}$$

Luego

$$R := \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{C_{n+1}}{C_n}\right) = 2\alpha$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Por el criterio de Raabe la serie converge si $R > 1$ esto es que $\alpha > 1/2$, y diverge si $\alpha < 1/2$.

En el caso de que $\alpha = 1/2$, se sigue por (6.5) que

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1/2}{k}\right) \sim \frac{n^{1/2}}{\sqrt{\pi/4}} \tag{6.18}$$

Como $\frac{1}{a_n^2} = \frac{\pi/4}{n} \geq \frac{1}{2n}$, y la serie $\sum \frac{1}{a_n^2}$ diverge

Lema 6.12. *Sea a_n definida en* (6.4)*, luego*

$$\sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{a_{l+1}} \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)n^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} \tag{6.19}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{a_{l+1}} &= \sum_{l=2}^{n} \frac{1}{a_l} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{a_l} - \frac{1}{a_1} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{\Gamma(l)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(l+\alpha)} - \frac{1}{a_1} \\
&= \Gamma(\alpha+1) \sum_{l=1}^{n} \frac{\Gamma(l)}{\Gamma(l+\alpha)} - 1
\end{aligned}$$

Haciendo uso del Lema 9.6, la ecuación (6.4) y tomando $a = 0$, $b = \alpha$, con $\alpha \neq 1$, se cumple:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{a_{l+1}} &= \Gamma(\alpha+1) \left[\tfrac{\Gamma(n+1)}{(\alpha-1)\Gamma(n+\alpha)} \cdot \left(\tfrac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} - 1\right)\right] - 1 \\
&= \Gamma(\alpha+1) \left[\tfrac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} - \tfrac{\Gamma(n+1)}{(\alpha-1)\Gamma(n+\alpha)}\right] - 1 \\
&= \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}{(\alpha-1)\Gamma(n+\alpha)} - 1 \\
&= \tfrac{\Gamma(\alpha+1)n\Gamma(n)}{(1-\alpha)\Gamma(n+\alpha)} - 1 + \tfrac{\alpha}{\alpha-1} \\
&= \tfrac{n}{(1-\alpha)a_n} + \tfrac{1}{\alpha-1} \\
&\sim \tfrac{n\Gamma(\alpha+1)}{(1-\alpha)n^{\alpha}} = \tfrac{\Gamma(\alpha+1)n^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 7

Demostraciones

En este capítulo presentaremos las demostraciones de los Teoremas principales

7.1. Demostración del Teorema 1

Primero observemos que

$$\begin{aligned}
\tfrac{a_n}{n} &= \tfrac{1}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)\\
&= \tfrac{1}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+\alpha}{k}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+\alpha}{k+1}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1+\alpha-1}{k+1}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1-\alpha}{k+1}\right)
\end{aligned}$$

Note que $-1 \leq \alpha \leq 1$, luego

$$0 \leq \frac{k+\alpha}{k+1} \leq 1 \tag{7.1}$$

Además $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{k+1} = \infty$ implica que $\lim \frac{a_n}{n} = 0$.

Se deduce de (7.1) que $(a_n)_{n\geq 1}$ es no creciente. Definamos $N_j = \frac{a_j}{j}\cdot \Delta M_j$. Por (6.10) podemos concluir que $(N_j)_{j\geq 1}$ es una secuencia de martingala tal que

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[N_j^2|\mathcal{F}_{j-1}] \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^2}{j^2} < \infty$$

Por el Teorema 2.17 en [17], $\sum_{j=1}^{\infty} N_j$ converge casi seguramente.

Dado que $\frac{n}{a_n} \to \infty$, por aplicación directa del Lema de Kronecker's (Lema 9.3)

$$\frac{a_n}{n} \sum_{j=1}^{n} \Delta M_j = \frac{a_n}{n} M_n \xrightarrow{c.s} 0$$

Con lo que queda demostrado (5.1)

$$\frac{a_n}{n} M_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{c.s} 0$$

Por otra parte usando el Lema 6.9 obtuvimos:

$$\mathbb{E}[S_n] = \beta a_n + \omega \cdot a_n \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{a_{l+1}}$$

Tomando $\alpha < 1$, tenemos que el primer término es $o(n)$ cuando $n \to \infty$, y por el Lema 6.12

$$\omega \cdot a_n \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{a_{l+1}} \sim \omega \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1) \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{\omega n}{1-\alpha}$$

7.2. Demostración del Teorema 2

De (6.11) obtenemos que $\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$, además de (4.5) se sigue:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\xi_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - (\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] &= \left[\frac{N(1,n)}{n}\cdot p + \frac{N(-1,n)}{n}\cdot q\right]\cdot\theta + (1-\theta)\cdot p \\
&+ \left[\frac{N(1,n)}{n}\cdot q + \frac{N(-1,n)}{n}\cdot p\right]\cdot\theta + (1-\theta)\cdot q \\
&= \left[\frac{N(1,n)+N(-1,n)}{n}\cdot p + \frac{N(1,n)+N(-1,n)}{n}\cdot q\right]\cdot\theta + (1-\theta)\cdot(p+q) \\
&= \frac{N(1,n)+N(-1,n)}{n}\cdot(p+q)\cdot\theta + (1-\theta)\cdot(p+q) \\
&= \tfrac{\gamma}{n}Z_n + \tau
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Donde $Z_n = N(1,n) + N(-1,n)$, $\gamma = (p+q)\theta$ y $\tau = (1-\theta)\cdot(p+q)$.

Así en (7.2) se tiene:

$$\mathbb{E}[(\xi_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] = \tfrac{\gamma}{n}Z_n + \tau - \left(\tfrac{\alpha}{n}S_n + \omega\right)^2 \tag{7.4}$$

Por la misma razón

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\xi_{n+1})^4|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\left(X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right)^4|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1}^4 - 4X_{n+1}^3\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + 6X_{n+1}^2(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2\right. \\
&\left. -4X_{n+1}\left(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right)^3 + \left(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right)^4|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - 4\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + 6\mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) \\
&\cdot\left(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right)^2 - 4\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\left(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right)^3 + \left(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right)^4 \\
&= \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - 4\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)^2 + 6\mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)\left(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right)^2 \\
&-3\left(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right)^4
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Para cualquier $n \geq 1$, se tiene que X_n es una variable aleatoria que toma valores en $\{+1, 0, -1\}$. En consecuencia, $\mathbb{E}[(\xi_{n+1})^2|\mathcal{F}_n]$ y $\mathbb{E}[(\xi_{n+1})^4|\mathcal{F}_n]$, son acotadas y por (7.4), (7.5) se tienen los limites superiores casi seguros

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] \leq 2 \quad y \quad \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[\xi_{n+1}^4|\mathcal{F}_n] \leq 16 \tag{7.6}$$

Se deduce de (6.11) y (7.4) que

$$\langle M\rangle_n \quad = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2}\left[\frac{\gamma}{k}Z_k + \tau - \left(\frac{\alpha}{k}S_k + \omega\right)^2\right] \tag{7.7}$$

El comportamiento asintótico de la martingala está estrechamente relacionado con la sumatoria

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\Gamma(k)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)}\right)^2 \tag{7.8}$$

En la **región difusiva** cuando $0 \leq \alpha < 1/2$. v_n diverge con velocidad $n^{1-2\alpha}$, ya que por Lema 6.11, (7.8) y (6.4) se tiene que:

$$\begin{aligned} v_n \quad &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\Gamma(k)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha)}\right)^2 \\ &\sim (\Gamma(\alpha+1))^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2\alpha}} \end{aligned} \tag{7.9}$$

Cuando $n \to \infty$, por la serie p la sumatoria diverge

$$v_n \quad \sim (\Gamma(\alpha+1))^2 \cdot \tfrac{n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \tag{7.10}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{n^{1-2\alpha}} = \frac{(\Gamma(\alpha+1))^2}{1-2\alpha} \tag{7.11}$$

En la **región critica** cuando $\alpha = 1/2$

$$v_n \quad \sim (\Gamma(3/2))^2 \log n \tag{7.12}$$

y

$$v_n \quad \sim (\Gamma(3/2))^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{7.13}$$

Así v_n diverge con velocidad $\log n$ ver Lema 6.11, y serie armónica, luego

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{\log n} = \frac{\pi}{4} \tag{7.14}$$

En la **región superdifusiva** cuando $1/2 < \alpha \leq 1$, v_n converge a un valor finito

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} v_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k (1)_k}{(\alpha+1)_k (\alpha+1)_k k!} \\ &= {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ (\alpha+1), (\alpha+1) \end{matrix} \middle| \; 1 \right) \end{aligned} \tag{7.15}$$

Donde para una $a \in \mathbb{R}$, $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k)$ para $k \geq 0$, $(a)_0 = 1$ representa el simbolo Pochhammer y ${}_3F_2$ la función hipergeométrica generalizada.

De (7.2) se tiene que:

$$\mathbb{E}[(\xi_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - (\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2$$

Usando (4.5) y el Teorema 5.1 se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \tfrac{\alpha}{n} S_n + \omega \quad \to \alpha \tfrac{\omega}{1-\alpha} + \omega \\ &= \tfrac{\alpha\omega + \omega - \alpha\omega}{1-\alpha} \\ &= \tfrac{\omega}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Además por (7.3) se tiene que $\mathbb{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \frac{\gamma}{n} Z_n + \tau$, en el Lema 6.8 se construye una martingala para Z_n, y de forma similar al Teorema 5.1 podemos demostrar que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \tfrac{Z_n - \mathbb{E}(Z_n)}{n} &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \tfrac{\mathbb{E}(Z_n)}{n} &= \tfrac{\tau}{1-\gamma} \end{aligned} \tag{7.16}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] &= \tfrac{\gamma}{n}Z_n + \tau \\ &\sim \tfrac{\tau}{1-\gamma}\gamma + \tau \\ &= \tfrac{\tau\gamma+\tau-\tau\gamma}{1-\gamma} \\ &= \tfrac{\tau}{1-\gamma}\end{aligned} \tag{7.17}$$

Así la esperanza de $(\xi_{n+1})^2$ resulta ser

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\xi_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - (\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2 \\ &\sim \tfrac{\tau}{1-\gamma} - \left(\tfrac{\omega}{1-\alpha}\right)^2 \\ &= \phi\end{aligned} \tag{7.18}$$

Y la esperanza de la diferencia de martingala se puede expresar

$$\mathbb{E}[(\Delta M_k)^2|\mathcal{F}_{k-1}] \sim \tfrac{\phi}{a_k^2} \tag{7.19}$$

Región difusiva $0 \leq \alpha < 1/2$

Haremos uso del Teorema central del límite para martingala dado por el Corolario 2.1.10 en [10] para establecer la normalidad asintótica en la región difusiva. Para ello es necesario probar que

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{\langle M\rangle_n}{v_n} = \phi \quad c.s \tag{7.20}$$

Usando el Lema 9.2, veamos que v_n diverge en la región difusiva y se sigue de (7.7) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[(\Delta M_{n+1})^2|\mathcal{F}_n]}{\frac{1}{a_k^2}} = \phi$$

Con lo cual queda demostrado (7.20) inmediatamente.

Ahora debemos probar que (M_n) satisface la condición de Lindeberg's, esto es, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{v_n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\Delta M_{k+1}|^2 I_{|\Delta M_{k+1}|\geq\varepsilon\sqrt{v_n}}|\mathcal{F}_n\right] \xrightarrow{P} 0 \tag{7.21}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Esto se puede ver, por ejemplo, en el marco del Teorema 2.1.9 en [10], escribiendo y utilizando (7.6):

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{v_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[|\Delta M_{k+1}|^2 I_{|\Delta M_{k+1}|\geq\varepsilon\sqrt{v_n}}|\mathcal{F}_n\right] &\leq \tfrac{1}{\varepsilon^2 v_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[|\Delta M_{k+1}|^4|\mathcal{F}_n\right]\\ &\leq \sup_{1\leq k\leq n}\mathbb{E}\left[\xi_{k+1}^4|\mathcal{F}_n\right]\tfrac{1}{\varepsilon^2 v_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^4}\\ &\leq \tfrac{16}{\varepsilon^2 v_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^4}\end{aligned}$$

Veamos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{v_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^4}=0 \tag{7.22}$$

Lo cual claramente se cumple ya que $a_n^{-4}v_n^{-2}$ es equivantente a $(1-2\alpha)n^{-2}$ y es bien conocido que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1/a_n^4}{v_n^2}<\infty \tag{7.23}$$

Y por el Lema de Kronecker's (Lema 9.3) se demuestra (7.22). Esto asegura que la condición de Lindeberg's se satisface.

Entonces podemos concluir por el Teorema central del limite para martingalas que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{\sqrt{v_n}}\xrightarrow{d}N(0,\phi)$$

Como $M_n=\frac{S_n-\mathbb{E}(S_n)}{a_n}$ por (6.4) y (7.9)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{\sqrt{v_n}}=\frac{s_n-\mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\frac{n}{1-2\alpha}}}$$

Luego

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\frac{n\phi}{1-2\alpha}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

En la región crítica $\alpha = 1/2$

Para la región critica se procede de manera similar a la región difusiva. Veamos que de igual forma v_n diverge en la región crítica y usando el Lema 9.2, y (7.7) se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle M\rangle_n}{v_n} = \phi \quad c.s$$

Además (7.23), se cumple dado que $a_n^{-4} v_n^{-2}$ es equivalente a $(n \log n)^{-2}$ por (7.13) y es bien conocido que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\log n)^2} < \infty$$

Ya vimos en el caso difusivo que (7.23) es una condición sufiente para que (M_n) satisfaga la condición de Lindeberg's. En consecuencia, podemos deducir del Teorema central del límite para martingalas que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\sqrt{v_n}} \xrightarrow{d} N(0,\phi)$$

Por (6.3) y (7.13)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\sqrt{v_n}} = \frac{s_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{n\log n}}$$

Quedaria probado que

$$\frac{s_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\phi \cdot n\log n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Región superdifusiva $1/2 < \alpha \leq 1$

En el caso $1/2 < \alpha \leq 1$, vimos que v_n converge a un valor finito ver (7.15). Por la definición de la variación cuadrática en (7.19), se tiene que $\langle M\rangle_n \leq v_n\phi$.

Utilizando el Teorema 1.3.15 de [10], donde $\langle M\rangle_\infty = \lim\langle M\rangle_n$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty \; c.s$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Si definiendo $W = M_\infty$, se cumple que

$$W := \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n} \quad c.s$$

Donde W es una variable aleatoria finita.

7.3. Demostración del Teorema 3

Para esta demostración haremos uso del Teorema 9.4 item ii), para ello debemos comprobar que para $\alpha > 1/2$ se cumple a) y b) de dicho Teorma.

Por [18] en el Corolario 1 una condición suficiente para a) es:

$$\frac{1}{r_n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}\right] \to 1 \textit{ cuando } n \to \infty \textit{ en probabilidad} \tag{7.24}$$

Donde $r_n^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2]$. Por la ecuación (7.19) y el Teorema de convergencia acotado, se tiene que:

$$\mathbb{E}[(\Delta M_k)^2] \sim \frac{\phi}{a_k^2}$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2] &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\phi}{a_k^2} \\ &\sim \phi\Gamma(\alpha+1)^2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} = \frac{\phi\Gamma(\alpha+1)^2}{(2\alpha-1)n^{2\alpha-1}} \\ &\sim \frac{\phi n}{(2\alpha-1)a_n^2} \; c.s \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\phi}{a_k^2} \\ &\sim \frac{\phi n}{(2\alpha-1)a_n^2} \; c.s \end{aligned}$$

Así cuando $n \to \infty$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}\right] = 1 \; c.s$$

Ahora la condición suficiente para que se cumpla b) es (9.2), para ello en el marco del Teorema 2.1.9 en [10], escribiendo y utilizando (7.6):

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[(\Delta M_{k+1})^2 : |\Delta M_{k+1}| \geq \varepsilon r_n|\mathcal{F}_n\right] &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 r_n^4}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[|\Delta M_{k+1}|^4|\mathcal{F}_n\right] \\ &\leq \sup_{1\leq k\leq n}\mathbb{E}\left[\xi_{k+1}^4|\mathcal{F}_n\right]\frac{1}{\varepsilon^2 r_n^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^4} \\ &\leq \frac{16}{\varepsilon^2 r_n^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^4}\end{aligned}$$

Veamos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^4} = 0 \tag{7.25}$$

Lo cual claramente se cumple ya que $a_n^{-4}r_n^{-4}$ es equivantente a $\frac{1}{a_n^2\phi}$ y ya demostramos en el Lema 6.11 que en el caso superdifusivo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2} < \infty$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1/a_n^4}{r_n^4} < \infty \tag{7.26}$$

Y por el Lema de Kronecker's (Lema 9.3) se demuestra (7.25). Esto asegura que la condición de Lindeberg's se satisface.

Entonces podemos concluir por el Teorema 9.4

$$\frac{W - M_n}{r_{n+1}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 8

Conclusiones

A lo largo del desarrollo de la investigación hemos demostrado que la herramienta de la martingala tiene gran alcance en cuanto al estudio de comportamientos asintóticos de caminatas aleatorias con dependencia fuerte.

En el capítulo 4 podemos observar como el modelo propuesto tiene un comportamiento favorable para ser analizado ya que se logra construir una martingala para dicho modelo, y el capítulo 6 se basa fuertemente en los fundamentos matemáticos necesarios para las demostraciones de los Teoremas principales, donde cobra gran importancia el estudio de la variable v_n ver (7.8) ya que se encuentra estrechamente relacionada con el comportamiento asintótico de dicho modelo. Encontrando tres regiones donde se ven afectadas las propiedades de la martingala como lo son: región difusiva cuando $\alpha < 1/2$, región crítica cuando $\alpha = 1/2$, y la región superdifusiva cuando $\alpha > 1/2$ donde no se logra describir el comportamiento asintótico, sin embargo se logra definir una variable positíva W.

Los resultados corroboran comportamientos encontrados en trabajos anteriores ver ([2, 20]), como lo son la Ley de los grandes números y el Teorema central del límite para martingalas, aunque estos Teoremas claves quedan claramente demostrados a través del trabajo, no se logró demostrar las propiedades de recurrencia o transiencia o grandes desvios.

Ahora bien, los métodos y resultados encontrados en este trabajo abren las puertas para poder atacar casos más generales dentro de este mismo problema, sin tener que recurrir a herramientas diferentes a este. Como por ejemplo:

En caminata multidimesional realizando la generalización natural del modelo propuesto en (4.5). Para una dimensión dada $d \geq 1$, sea (S_n) un paseo aleatorio en $\mathbb{Z}^d$, comenzando en el origen en el momento cero, $S_0 = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{0}$ denota el

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

vector neutro en $\mathbb{Z}^d$ y definamos una evolución a tiempo discreto $(X_i)_{i\geq 1}$.

Definamos el primer paso X_1 del caminante como:

$$X_1 = \begin{cases} +e_1 & \text{, con probabilidad } p/d, \\ -e_1 & \text{, con probabilidad } q/d, \\ +e_2 & \text{, con probabilidad } p/d, \\ -e_2 & \text{, con probabilidad } q/d, \\ \vdots & \\ +e_d & \text{, con probabilidad } p/d, \\ -e_d & \text{, con probabilidad } q/d, \\ \mathbf{0} & \text{, con probabilidad } r. \end{cases} \tag{8.1}$$

Sea $\mathcal{F}_n$ la σ-algebra generada por $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, para todo $n = 1, 2, \ldots$. El paso n-esimo denota una opinión o un movimiento, dado por $X_n \in E_d = \{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \ldots, e_d, -e_d, \mathbb{0}\}$, el conjunto de d-direcciones conjuntamente con las d-direcciones opuestas, donde $(e_1, \ldots, e_d)$ es la base canonica del espacio Euclideano $\mathbb{R}^d$, y $\mathbf{0}$ denota falta de movimiento.

Para el paso $n+1$ se sortea una variable Y_n Bernoulli con parámetro θ, dado que si $Y_n = 0$, el caminante decide indepentiente del pasado tal que:

$$X_{n+1} = \begin{cases} +e_1 & \text{, con probabilidad } p/d, \\ -e_1 & \text{, con probabilidad } q/d, \\ +e_2 & \text{, con probabilidad } p/d, \\ -e_2 & \text{, con probabilidad } q/d, \\ \vdots & \\ +e_d & \text{, con probabilidad } p/d, \\ -e_d & \text{, con probabilidad } q/d, \\ \mathbf{0} & \text{, con probabilidad } r. \end{cases} \tag{8.2}$$

En el caso de $Y_n = 1$, el caminante sigue la dinámica del elefante con detenciones multidimensional generalizando la propuesta (4.4). Para ello se sortea de manera uniforme una variable aleatoria $t \in \{1, \ldots, n\}$, de forma que el n+1-paso se define:

$$X_{n+1} = \begin{cases} x_t & \text{, con probabilidad } p, \\ -x_t & \text{, con probabilidad } q, \\ \mathbf{0} & \text{, con probabilidad } r. \end{cases} \tag{8.3}$$

Esta extesión multidimensional del modelo permite conservar la cantidad de parámetros en estudio, lo que debe facilitar el empleo de los fundamentos matemáticos vistos en este trabajo.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 9

Apendice

En esta sección citaremos algunos teoremas y lemas ya conocidos y muy utilizados en trabajos anteriore, que son de gran utilidad para la demostraciones de los teoremas principales en estudio.

Lema 9.1. *La solución general de la recursividad* $\{X_n\}$

$$\begin{cases} x_1 = f_0 \\ x_{n+1} = f_n + g_n \cdot x_n \quad para \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

es dada por

$$x_n = \sum_{l=0}^{n-1} f_l \cdot \prod_{k=l+1}^{n-1} g_k \tag{9.1}$$

Demostración La demostración se encuentra en (12) y (13) de Schütz y Trimper en [22].

Lema 9.2. *Si una secuencia real* $\{a_n\}$ *y un secuencia positiva* $\{b_n\}$ *satisface*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R} \cup \pm\infty \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k} = L$$

Demostración Ver Knopp [19], p.34

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Lema 9.3 (Lema de Kronecker)**.** *Sean* $(X_n)_{n\geq 1}$ *y* $(b_n)_{n\geq 1}$ *secuencias de números reales tal que* $b_n > 0 \nearrow \infty$.

$$Si \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{b_k} \text{ converge, entonces } \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{b_n} = 0$$

Ver [7].

Teorema 9.4. *Suponga que* $\{M_n\}$ *es una martingala cuadraticamente integrable con media* 0. *Sea* $\Delta M_k = M_k - M_{k-1}$ *para* $k = 1, 2, \ldots,$ *donde* $M_0 = 0$. *Si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\Delta M_k)^2\right] < +\infty$$

Adicionalmente sea $r_n^2 := \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\Delta M_k)^2\right]$. *Entonces*

(i) El limite $M_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta M_k)^2$ *existe c.s, y* $M_n \xrightarrow{L^2} M_\infty$.

(ii) Asuma que

a) $\frac{1}{r_n^2} \sum_{k=n}^{\infty} (\Delta M_k)^2 \to 1$ *cuando* $n \to \infty$ *en probabilidad, y*

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n^2} \mathbb{E}\left[sup_{k\geq n} (\Delta M_k)^2\right] = 0$ *Entonces se tiene que*

$$\frac{M_\infty - M_n}{r_{n+1}} = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta M_k}{r_{n+1}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Observación 9.5. *una condición suficiente para b) en este Teorema es que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\Delta M_k)^2 : |\Delta M_k| > \varepsilon r_n\right] = 0 \tag{9.2}$$

para cualquier $\varepsilon > 0$

Ver prueba en [18] Corolario 1.

Lema 9.6. *Para números reales no negativos* a *y* b *tal que* $b \neq a + 1$ *y para todo* $n \geq 1$, *tenemos:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} = \frac{\Gamma(n+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(n+b)} \left(\frac{\Gamma(n+b)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)\Gamma(b)} - 1\right) \tag{9.3}$$

Ver [2] pag 11.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Bibliografía

[1] E. Baur and J. Bertoin. Elephant random walks and their connection to pólya-type urns. *Physical Review E*, 94:052134, 2016.

[2] B. Bercu. A martingale approach for the elephant random walk. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 51(1):015201, 2017.

[3] B. Bercu and L. Laulin. On the multi-dimensional elephant random walk. *Journal of Statistical Physics*, 175(6):1146–1163, 2019.

[4] M. Bertenghi. Functional limit theorems for the multi-dimensional elephant random walk. *arXiv preprint arXiv:2004.02004*, 2020.

[5] J. Bertoin. Noise reinforcement for lèvy processes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 56(3):2236–2252, 2020.

[6] J. Bertoin. Universality of noise reinforced brownian motions. *arXiv preprint arXiv:2002.09166*, 2020.

[7] G. Budianu. A version of the kronecker lemma. *University politehnica of bucharest scientific bulletin-series a-applied mathematics and physics*, 70(2):37–44, 2008.

[8] C. F. Coletti and I. Papageorgiou. Asymptotic analysis of the elephant random walk. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2021(1):013205, 2021.

[9] G. R. Coletti, C. and G. Schütz. Central limit theorem for the elephant random walk. *Journal of Mathematical Physics*, 56:05330, 2017.

[10] M. Duflo. *Random iterative models*, volume 34. Springer Science & Business Media, 2013.

[11] M. González-Navarrete. Multidimensional walks with random tendency. *Journal of Statistical Physics*, 181(4):1138–1148, 2020.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

[12] M. González-Navarrete and R. Lambert. Urn models with two types of strategies. *arXiv preprint arXiv:1708.06430*, 2017.

[13] M. González-Navarrete and R. Lambert. Non-markovian random walks with memory lapses. *Journal of Mathematical Physics*, 59(11):113301, 2018.

[14] M. González-Navarrete and R. Lambert. The diffusion of opposite opinions in a randomly biased environment. *Journal of Mathematical Physics*, 60(11):113301, 2019.

[15] A. Gut and U. Stadtmüller. Variations of the elephant random walk. *arXiv preprint arXiv:1812.01915*, 2018.

[16] A. Gut and U. Stadtmüller. Elephant random walks with delays. *arXiv preprint arXiv:1906.04930*, 2019.

[17] P. Hall and C. C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Academic press, 2014.

[18] C. C. Heyde. On central limit and iterated logarithm supplements to the martingale convergence theorem. *Journal of Applied Probability*, 14(4):758–775, 1977.

[19] K. Knopp. *Infinite sequences and series*. Courier Corporation, 1956.

[20] N. Kubota and M. Takei. Gaussian fluctuation for superdiffusive elephant random walks. *Journal of Statistical Physics*, 177(6):1157–1171, 2019.

[21] L. Rincón. *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2012.

[22] G. M. Schütz and S. Trimper. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk. *Physical Review E*, 70(4):045101, 2004.