Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile


UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Magíster en Matemática
Mención Matemática Aplicada o Mención Estadística

Universidad del Bío-Bío
Facultad de Ciencias
Departamento de Estadística y Departamento de Matemática
Programa de Magíster en Matemática,
mención Matemática Aplicada o
mención Estadística.


# Modelamiento Matemático en la separación sólido-líquido: circuitos a contracorriente

Tesis presentada por


Juan David Barajas Calonge


al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada o Mención Estadística para la obtención del grado de

*Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada.*


Director: Dr. Luis Miguel Villada

Co-director: Dr. Raimund Bürger


Septiembre de 2022

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Modelamiento Matemático en la separación sólido-líquido: circuitos a contracorriente

tesis presentada por

Juan David Barajas Calonge

*Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío-Bío como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada de la Universidad del Bío-Bío.*

Aprobada por:

---

Luis Miguel Villada
Director
Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío

---

Raimund Bürger
Co-Director
Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción

---

Felipe Lepe
Profesor Informante
Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío

---

Fernando Betancourt
Profesor Informante
Departamento de Ingeniería Metalúrgica, Universidad de Concepción

Universidad del Bío-Bío
Facultad de Ciencias
Departamento Estadística y Departamento de Matemática

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# *Agradecimientos*

Quisiera dedicar estas cortas líneas para agradecer a todas las personas que contribuyeron a que este trabajo llegara a buen puerto.

Inicialmente, quiero agradecer a mis directores de tesis, Luis Miguel Villada y Raimund Bürger, por aceptar trabajar conmigo en este proyecto, por su paciencia y buena disposición a pesar de estos dos difíciles años que estuvieron marcados por la pandemia producto del COVID-19. Ustedes representan el arquetipo de investigador que deseo ser en un futuro.

A los profesores Felipe Lepe y Fernando Betancourt, por sus correcciones y sugerencias las cuales mejoraron la presentación del documento y clarificaron el desarrollo de las ideas expuestas en este trabajo.

A mis profesores de magíster, pues aunque tuvimos que adaptarnos a la modalidad virtual de clases, siempre tuvieron la motivación para compartir sus conocimientos, los cuales me fortalecieron como matemático.

A mi madre Luz Marina, pues me apoyó en momentos de pesadumbre con el cálido amor de madre. A mi padre, Samuel Barajas, quien partió de este mundo en 2014, pero cuyas enseñanzas de vida seguirán en mí eternamente, esta tesis es para ustedes. A mi familia materna, por brindarme hogar y apoyo económico en estos dos años.

A mi novia (o polola, como ella dice) Yocelyn y mis compañeros en Chile: Alberth, Rubén, Angélica, Yuliza, Eider, Carola, Harold y Claudio, pues me recibieron de la mejor forma cuando llegué a Chile y estuvieron conmigo motivándome en los meses que dediqué a la preparación de este documento. Gracias a todos ellos, por los momentos (académicos y no académicos) que hemos compartido.

Al programa de Becas Supernumerario, de la Universidad del Bío-Bío, al proyecto Fondecyt 1181511 y al grupo de investigación GIMNAP, por financiar mis estudios de magíster.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Resumen

En esta tesis estudiamos el modelamiento y análisis numérico del proceso de separación sólido-líquido en un circuito de decantación a contracorriente. La separación sólido líquido es una parte fundamental de muchos procesos de tratado hidrometalúrgico en los cuales líquidos o soluciones tienen que ser recuperadas con la mejor calidad posible. De acuerdo a Svarovsky (2001, [1]), el sistema a contracorriente hace uso de varios clarificadores-espesadores (CTs) para separar y lavar el material sólido insoluble en líquidos. Como consecuencia, las soluciones decantadas (desbordamiento) contienen sólidos disueltos que son valiosos o que son un problema para la producción. Este proceso es conocido como Decantación a Contra Corriente (CCD). Se usan sistemas de leyes de conservación para modelar las unidades individuales de CTs [2]. La tesis tiene los siguientes objetivos:

El primer objetivo de esta tesis es demostrar la existencia y unicidad de una ley de conservación con flujo continuo mediante un esquema numérico que hace uso de una característica específica del flujo, la cual radica en que es posible escribirlo como el producto de la concentración por la velocidad.

El segundo objetivo de esta tesis es proponer un sistema de leyes de conservación con flujo discontinuo para describir los CTs que conforman el circuito CCD, adicionando un término fuente que describe el acoplamiento entre los diferentes tanques.

El tercer objetivo de esta tesis es demostrar el buen planteamiento del problema en el caso $N = 1$. Para esto, se estudia la convergencia de un esquema de volúmenes finitos a la única solución de entropía del problema. Se realizan experimentos numéricos comparando las soluciones obtenidas con una solución de referencia generada por el método de Engquist-Osher.

El cuarto objetivo de esta tesis es proponer un esquema de volúmenes finitos para el caso $N > 1$. Se demuestra que, bajo cierta condición CFL, el esquema satisface el principio del máximo. Se realizan algunas simulaciones numéricas que ilustran el comportamiento de las soluciones en casos particulares.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Abstract

In this thesis, we study the modeling and numerical analysis of the solid-liquid separation process in a countercurrent decantation circuit. The liquid-solid separation is a fundamental part of many processes of hydrometallurgical treatments, in which liquids or settlings have to be recovered with the best possible quality. According to Svarovsky (2001, [1]), the countercurrent system uses several clarifier-thickeners (CTs) to separate and wash the solid material insoluble in liquids. As a result, the decanted solutions (underflow) contain dissolved solids that are valuable or are a problem for production. This process is known as Counter Current Decanting (CCD). Systems of conservation laws are used to model individual units of CTs [2]. The thesis has the following objectives:

The first objective of this thesis is to demonstrate the existence and uniqueness of a conservation law with continuous flux by using a numerical scheme that takes advantage of a specific characteristic of the flow, which is that it can be written as the product of the concentration by the velocity.

The second objective of this thesis is to propose a system of conservation laws with discontinuous flux in space describing the CTs that make up the CCD circuit network, with source term describing the coupling between the different tanks.

The third objective of this thesis is to show the well-posedness of the problem in the case $N = 1$. For this, the convergence of a finite volume scheme to the unique entropy solution of the problem is studied. Numerical experiments are performed comparing the solutions obtained with a reference solution generated by the Engquist-Osher method.

The fourth objective of this thesis is to propose a finite volume scheme for the case $N > 1$. It is shown that, under a specific CFL condition, the scheme satisfies the maximum principle. Some numerical simulations are carried out that illustrate the behavior of the solutions in particular cases.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Índice general

**Resumen** vii

**Abstract** ix

**Introducción** xv
0.1. Antecedentes: Modelos matemáticos en sedimentación . . . . . xvi
0.2. Objetivos . . . . . xvii

**1. Leyes de conservación con flujo continuo** **1**
1.1. Problema base . . . . . 1
1.2. Unicidad de las soluciones . . . . . 4
1.3. Existencia de la solución . . . . . 9
1.3.1. Método de volúmenes finitos . . . . . 9
1.3.2. Prueba del Teorema principal . . . . . 18
1.4. Experimentos numéricos . . . . . 20
1.5. Conclusiones del capítulo . . . . . 25

**2. Modelamiento matemático de un CCD** **27**
2.1. Caudales . . . . . 27
2.2. Modelo del clarificador-espesador . . . . . 30
2.3. Transferencia entre clarificadores-espesadores . . . . . 31
2.4. Solución de entropía $\mathbf{BV_t}$ . . . . . 34
2.5. Conclusiones del capítulo . . . . . 35

**3. Existencia de solución del problema para el caso $N = 1$** **37**
3.1. Método de volúmenes finitos . . . . . 38
3.2. Convergencia del esquema numérico . . . . . 40
3.2.1. Principio del máximo . . . . . 40

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



3.2.2. Cota $\mathbf{L^1}$ temporal . . . . . 41
3.2.3. Cota de variación espacial . . . . . 47
3.2.4. Desigualdad discreta de entropía . . . . . 49
3.2.5. Teorema principal . . . . . 51
3.3. Experimentos numéricos . . . . . 56
3.4. Unicidad . . . . . 59
3.5. Conclusiones del capítulo . . . . . 61

**4. Existencia de solución del problema principal** **63**
4.1. Método de volúmenes finitos . . . . . 63
4.2. Principio del máximo . . . . . 65
4.3. Experimentos numéricos . . . . . 66
4.4. Conclusiones del capítulo . . . . . 69

**5. Conclusiones y trabajo futuro** **71**

**Anexos** **73**

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

*A mi padre Samuel Barajas Jiménez (in memoriam) y a mi madre Luz Marina Calonge Ramos*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Introducción

El presente trabajo está direccionado al modelamiento y análisis numérico del proceso de separación sólido-líquido: circuitos a contracorriente. La separación sólido-líquido es una parte fundamental en la mayoría de los procesos de tratamiento e hidrometalúrgicos, y de importancia especial después de procesos de lixiviación, clarificación antes de cambio iónico, extracción por solventes, precipitación, donde hay que recuperar los líquidos o soluciones portantes y en aquellos otros procesos donde se precise recuperar los sólidos de la mejor calidad posible, como por ejemplo, cristalización o precipitación.

De acuerdo a Svarovsky (2001, [1]), el sistema a contacorriente utiliza varios espesadores (*thickeners*) en serie para separar y lavar el material sólido insoluble de los líquidos. Las soluciones decantadas (el *underflow*) contienen sólidos disueltos que son valiosos o que son un problema para la producción. Se distinguen dos términos, Decantación a Contracorriente (CCD) y Lavado de solidos a Contracorriente (CCW). En aplicaciones reales, el término CCD tiende a usarse cuando los espesantes por gravedad son los separadores del sistema. El producto es un soluto en el líquido de lavado "decantado" en el desbordamiento del sistema (por ejemplo, en el lavado de lodo rojo en el proceso Bayer de refinado de óxido de aluminio donde se recupera cáustico del lodo rojo que luego se desecha). De otra parte, el término CCW implica que los sólidos son los productos.

Para ejemplificar, en el proceso de recuperación de oro, el sistema CCD de lavado pulpas de cianuro es el lavado de la pulpa en espesadores (*thickeners*) en serie, ver Figura 1. La pulpa se introduce en el primer espesador, y el agua en el último espesador. El flujo de la pulpa y el agua es en direcciones opuestas. En consecuencia, la pulpa se vuelve progresivamente más baja en contenido de oro soluble a medida que pasa a la descarga. Por el contrario, el agua añadida en el último espesador pasa hacia adelante, aumentando su concentración de cal, cianuro, y oro. El sistema CCD se utiliza para complementar la filtración. La torta que sale de los filtros, presenta aproximadamente un 10 % de humedad. Esta humedad, no es otra cosa más que solución con un mínimo de oro disuelto, que será enviado junto con los sólidos, previa destrucción del cianuro,

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



a la presa de jales. Por último la solución rica es clarificada, desoxigenada, y el oro precipitado con polvo de zinc muy fino, y de alta pureza [3].

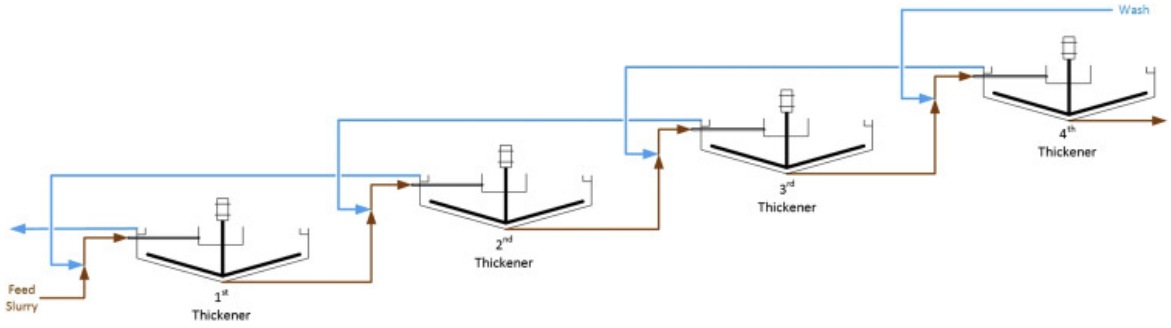



Figura 1: Ejemplo de CCD en el procesamiento de oro.

El concepto de espesamiento o *thickening* es muy simple y radica en la decantación; consiste en dejar una mezcla líquida y homogénea dentro de un tanque y que las partículas sólidas finas se acumulen en el fondo sólo por efecto de la gravedad, separando así el material sólido del líquido clarificado en la parte superior.

La matemática subyacente bajo un modelo de separación sólido-líquido para un espesador o un CCD representa un problema matemático que involucra aspectos del análisis matemático y numérico de leyes de conservación y de ecuaciones diferenciales parciales tipo parabólicas (posiblemente fuertemente degeneradas) [4], además de leyes de conservación con flujo discontinuo respecto de la coordenada espacial, abarcando así un amplio campo de estudio.

## 0.1. Antecedentes: Modelos matemáticos en sedimentación

La modelación matemática para procesos de espesamiento y clarificación nace de la mano de Hazen [5] en 1904, quien hace el primer análisis de los factores que afectan la sedimentación de partículas sólidas en una suspensión diluida en agua. Este trabajo demuestra que la variable del tiempo no es un factor a considerar en el diseño de estanques de sedimentación, como sí lo son las variables espaciales, específicamente muestra que las porciones de sólido removidas son proporcionales al área superficial del estanque, a las propiedades físicas de las partículas e inversamente proporcional al flujo volumétrico del estanque. En 1912 Mishler [6] es el primero en demostrar mediante experimentos, que la velocidad de sedimentación de la pulpa es diferente para

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



suspensiones diluidas que para las concentradas. Mientras la velocidad de asentamiento de suspensiones diluidas es generalmente independiente de la altura de la columna de sedimentación, sedimentos densos son gobernados por diferentes leyes y, en este caso, la velocidad de asentamiento incrementa aumentando la altura de la columna. Con esta hipótesis, Mishler deduce una fórmula para obtener la capacidad de un espesador industrial, basado en experimentos de laboratorio.

La década de los 50' está marcada por la teoría de sedimentación de Kynch [7], quien plantea que la sedimentación está basada en una ecuación diferencial parcial hiperbólica, en donde el dato inicial, la concentración inicial, se propaga mediante ondas a través del tiempo, formando el perfil de sedimentación. Él resuelve la ecuación explícita del modelo y muestra que conociendo la concentración inicial de la suspensión y la densidad de flujo del sólido, se puede obtener una solución de la ecuación por el método de las características, resultando en zonas donde la concentración varía continuamente (ondas de rarefacción) y en discontinuidades (ondas de choque).

Una revisión bibliográfica que consta de más de 100 publicaciones en los últimos 50 años puede ser encontrada en [8, 9]. Para el presente trabajo, nos enfocaremos en los trabajos sobre modelamiento ideal del clarificador-espesador [2, 10, 11], los resultados sobre procesos de sedimentación-consolidación de suspensiones floculadas, las cuales son consideradas como mezclas de dos medios continuos superpuestos [12], el modelo de sedimentación continua con compresión [13], y el modelo que incluye una descripción del transporte y reacción de estos componentes [14].

Al día de hoy, la teoría matemática sobre modelización del proceso de separación sólido-líquido sobre cada espesador o *thickeners* es bastante amplia, sin embargo, es escasa en circuitos a contracorriente, por lo cual, el desarrollo de este proyecto, pretende entregar un aporte significativo al estado del arte en esta área.

## 0.2. Objetivos

El objetivo general del presente proyecto es:

- Modelar matemáticamente un proceso de separación sólido-líquido en circuitos en contracorriente mediante el uso de ecuaciones diferenciales parciales tipo leyes de conservación con flujo discontinuo en la variable espacial.

Para alcanzar este objetivo general, se lograrán uno a uno los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar el buen planteamiento (existencia y unicidad) de una ley de conservación con flujo discontinuo respecto a la variable espacial.
- Demostrar las propiedades y la convergencia de un esquema de volúmenes finitos para aproximar la solución de una ley de conservación con flujo discontinuo.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



- Proponer un esquema numérico para representar la dinámica del proceso de separación sólido-líquido en circuitos en contracorriente.
- Extender los esquemas numéricos propuestos a esquemas de segundo orden de aproximación en espacio y tiempo.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Capítulo 1

# Leyes de conservación con flujo continuo

Este capítulo esta dedicado al estudio de las leyes de conservación con flujo continuo. Estudiaremos un problema modelo que tiene diversas aplicaciones en fenómenos físicos. Mostraremos la unicidad del problema mediante el uso de la técnica de duplicación de variables de Kružkov y propondremos un esquema numérico monótono para aproximar la solución del problema y así establecer existencia de la solución del mismo. Se probará la convergencia de este esquema mediante el uso de resultados clásicos como el Teorema de Lax-Wendroff (Véase Lema 1.4) y el Lema de Helly (Véase Lema 5.1 en Anexo 1).

## 1.1. Problema base

En esta sección presentaremos una ley de conservación que servirá de ejemplo para desarrollar la teoría matemática usual para el estudio del buen planteamiento de problemas que involucran de leyes de conservación con flujo continuo. Discutiremos la importancia del estudio de este tipo de Ecuaciones Diferenciales Parciales y finalmente definiremos el concepto de solución débil para el problema en cuestión.

Se entiende por ley de conservación una EDP de la forma,

$$\partial_t u + \nabla \cdot f(u) = 0.$$

La función $f$ se denomina función de flujo y $u$ es la función incógnita. Si escribimos $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, e introducimos un dato inicial $u_0$ en $t = 0$, el problema de Cauchy para la ley de conservación se escribe como,

$$\partial_t u(x,t) + \sum_{j=1}^{m} \partial_j f_j(u(x,t)) = 0, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0. \tag{1.2}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



En aplicaciones $t$ normalmente denota la variable temporal, mientras que $x$ describe la variación espacial en un espacio $m-$dimensional [15].

En nuestro caso, estudiaremos una ley de conservación con flujo de la forma $f(u) = uV(u)$, donde $V$ es una función continua que satisface ciertas propiedades que se especificarán luego, es decir, estamos interesados en estudiar el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t + (uV(u))_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Este tipo de ley de conservación tiene un amplio rango de aplicaciones en diversos tipos de problemas. Por ejemplo, flujos del estilo $f(\rho) = \rho V(\rho)$, donde

$$V(\rho) = v_{\text{máx}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{máx}}}\right),$$

son empleados en el estudio de problemas de tráfico vehicular [16, 17, 18]. Aquí, $\rho(x,t)$ representa la densidad de autos en determinada posición $x$ de la carretera en un instante $t$, $v_{\text{máx}}$ denota la velocidad máxima de los vehículos y $\rho_{\text{máx}}$ la densidad máxima de los mismos. Similarmente, flujos de Richardson-Zaki, $f_{\text{bk}}(\phi) = \phi V(\phi)$, con,

$$V(\phi) = v_{\text{St}} \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\text{máx}}}\right)^{n_{\text{MB}}}, \tag{1.4}$$

y de Vesilind,

$$V(\phi) = v_{\text{St}} \frac{\exp(-r_{\text{V}}\phi) - \exp(-r_{\text{V}}\phi_{\text{máx}})}{1 - \exp(-r_{\text{V}}\phi_{\text{máx}})}, \tag{1.5}$$

son empleados en el estudio de problemas de sedimentación [19, 20]. En este caso, $\phi$ denota la concentración de sólidos, $\phi_{\text{máx}}$ la concentración máxima, $v_{\text{St}}$ es la velocidad de Stokes y $r_{\text{V}}$ y $m_{\text{MB}}$ son constantes adimensionales.

Ahora bien, nos centramos en el problema (1.3) el cual tiene un flujo con velocidad general. Asumimos que se satisfacen los siguientes supuestos:

$$\begin{aligned} &u_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}; [0, u_{\text{máx}}]); \\ &0 \leq V(u) \leq V_{\text{máx}}, \text{ para todo } u \in [0, u_{\text{máx}}]; \\ &V'(u) \leq 0, \text{ para todo } u \in [0, u_{\text{máx}}], \end{aligned} \tag{1.6}$$

que serán de mucha utilidad para mostrar el buen planteamiento de (1.3).

Definimos a continuación el concepto de solución débil para (1.3), la cual permite que una solución discontinua de (1.3) sea admisible.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



**Definición 1.1.** *Sea $u_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}; [0, u_{\text{máx}}])$. Decimos que $u$ es una solución débil de* (1.3) *con dato inicial $u_0$ si para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$,*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x, 0) dx = 0. \tag{1.7}$$

Es conocido que este tipo de leyes de conservación presentan saltos en tiempos finitos [15, 21]. Más precisamente, si consideramos el problema de Riemann,

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_{\text{l}}, & \text{para } x \leq 0, \\ u_{\text{r}} & \text{para } x > 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

requerimos que se satisfaga que la siguiente condición de salto,

$$s(u_{\text{r}} - u_{\text{l}}) = f(u_{\text{r}}) - f(u_{\text{l}}), \quad s = x'(t) \tag{1.9}$$

Esta condición se denomina *Condición de Rankine-Hugoniot* (ver [2], [22]). Con la cual podemos expresar la solución de (1.8) como,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_{\text{l}}, & \text{para } x \leq st, \\ u_{\text{r}} & \text{para } x > st. \end{cases} \tag{1.10}$$

Así pues, dada una ley de conservación, es natural preguntarse si existe una única solución débil para esta. Finalizamos esta sección presentando un ejemplo que ilustra que no siempre ese es el caso.

**Ejemplo 1.2** (Ecuación de Bürgers)**.** *Consideremos la siguiente ley de conservación,*

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \textit{para } x \leq 0, \\ -1 & \textit{para } x > 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

*Para cada $\alpha \geq 1$, defina la función,*

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} 1, & \textit{para } x \leq (1 - \alpha)t/2 \\ -\alpha, & \textit{para } (1 - \alpha)t/2 < x \leq 0, \\ \alpha, & \textit{para } 0 < x \leq (\alpha - 1)t/2, \\ -1, & \textit{para } x \geq (\alpha - 1)t/2. \end{cases} \tag{1.12}$$

*En el caso de la ecuación de Burgers vemos que se debe satisfacer la condición de Rankine-Hugoniot:*

$$s = \frac{u_r^2/2 - u_l^2/2}{u_r - u_l} = \frac{u_l + u_r}{2}.$$

*Notamos pues que la función $u_\alpha$ satisface esta condición de salto. En consecuencia,* (1.12) *es solución de* (1.11)*, para cada $\alpha \geq 1$.*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



## 1.2. Unicidad de las soluciones

En esta sección estudiaremos la unicidad de la ley de conservación. Para ello, definiremos el concepto de solución de entropía y haremos uso de la denominada técnica de duplicación de variables de Kružkov para probar que (1.3) tiene única solución.

Como vimos en el Ejemplo 1.2 de la sección anterior, una ley de conservación puede tener infinitas soluciones débiles. Por lo tanto, se requiere imponer condiciones adicionales para garantizar el buen planteamiento de problemas del tipo (1.3). Para esto, precisamos la definición de solución de entropía.

**Definición 1.3.**

1. *Una función $u$ se llama una solución de entropía en el sentido de Kružkov o simplemente una solución de entropía de Kružkov de la ley de conservación $u_t + f(u)_x = 0$ para $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ si,*

$$\begin{aligned} &\forall\, k \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty)), \quad \phi \geq 0 : \\ &\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \big(|u-k|\phi_t + \operatorname{sgn}(u-k)(f(u)-f(k))\phi_x\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

2. *Si consideramos soluciones en un intervalo finito de tiempo $[0,T]$ y usamos funciones test no negativas $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$, obtenemos que para todo $k \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \big(|u-k|\phi_t + \operatorname{sgn}(u-k)(f(u)-f(k))\phi_x\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &- \int_{\mathbb{R}} |u(x,T)-k|\phi(x,T)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)-k|\phi(x,0)\mathrm{d}x \geq 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

La desigualdad de entropía (1.14) permite garantizar la unicidad de solución de la ley de conservación. A continuación mostraremos la dependencia continua de la solución con respecto al dato inicial.

**Teorema 1.4.** *Asuma que $f$ es Lipschitz continua y sean $u, v \in \mathbf{L^1} \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ dos soluciones débiles de los problemas de valores iniciales,*

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \qquad u(x,0) = u_0, \\ \partial_t v + \partial_x(f(v)) = 0, \qquad v(x,0) = v_0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

*respectivamente, que satisfacen a su vez la condición de entropía de Kružkov. Asuma que $u_0 - v_0$ es integrable y que $u$ y $v$ tienen variación total finita en $x$, para cada tiempo. Entonces,*

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_1 \leq \|u_0 - v_0\|_1. \tag{1.16}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



*Demostración.* Sea $\phi = \phi(x,t,y,s)$ una función test no negativa tanto en $(x,t)$ como en $(y,s)$ con soporte compacto en $t > 0$ y $s > 0$. Dado que ambas funciones $u$ y $v$ satisfacen (1.13), podemos elegir $k = v(y,s)$ en la desigualdad para $u$ y $k = u(x,t)$ en la desigualdad para $v$.

Luego, integramos la desigualdad para $u$ con respecto a $y$ y $s$ y la desigualdad para $v$ con respecto a $x$ y $t$. La suma resulta,

$$\iiiint \{|u(x,t) - v(y,s)|(\phi_t + \phi_s) + q(u,v)(\phi_x + \phi_y)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \geq 0. \tag{1.17}$$

Ahora juntamos algunos hechos básicos sobre las funciones *mollifier*. Estas funciones son "distribuciones $\delta$ aproximadas". Consideramos funciones $\omega_\epsilon$, con $\omega_\epsilon \to \delta_0$, para $\epsilon \to 0$.

Sea $\omega = \omega(\sigma) \in C^\infty$, $0 \leq \omega(\sigma) \leq 1$, $\operatorname{supp}\omega \subseteq [-1,1]$, $\omega(-\sigma) = \omega(\sigma)$,

$$\int_{-1}^{1} \omega(\sigma)d\sigma = 1, \quad \omega_\epsilon(\sigma) := \frac{1}{\epsilon}\omega\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right).$$

**Lema 1.1.** *Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz continua y $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Sean $u, v \in \mathbf{L^1} \cap \mathbf{L^\infty}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$. Entonces,*

$$\begin{aligned}&\iiiint F(u(x,t),v(y,s))\Psi\left(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2}\right)\omega_\epsilon(x-y)\omega_{\epsilon_0}(t-s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\\ &\qquad\xrightarrow{\epsilon,\epsilon_0\downarrow 0} \iint F(u(x,t),v(x,t))\Psi(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

*Demostración.* Para simplificar la demostración, omitimos la variabilidad en el tiempo y deseamos demostrar que,

$$\iint F(u(x),v(y))\Psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\omega_\epsilon(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} \int F(u(x),v(y))\Psi(x)\mathrm{d}x.$$

Observamos primeramente que,

$$\int F(u(x),v(y))\Psi(x)dx = \iint F(u(x),v(x))\Psi(x)\omega_\epsilon(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

luego obtenemos que,

$$\begin{aligned}&\iint F(u(x),v(y))\Psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\omega_\epsilon(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint F(u(x),v(x))\Psi(x)\omega_\epsilon(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint \Big(F(u(x),v(y)) - F(u(x),v(x))\Big)\Psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\omega_\epsilon(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\quad + \iint F(u(x),v(x))\left[\Psi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \Psi(x)\right]\omega_\epsilon(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\quad := I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Estimamos las dos integrales $I_1$ e $I_2$ por separado. Utilizando que $u$ es acotada y la Lipschitz continuidad de $F$, obtenemos,

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \|\Psi\|_{\mathbf{L}^\infty} C \iint |v(x)-v(y)|\omega_\epsilon(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leq \|\Psi\|_{\mathbf{L}^\infty} C \iint |v(y+z)-v(y)|\omega_\epsilon(z)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\
&\leq \|\Psi\|_{\mathbf{L}^\infty} C \sup_{|z|\leq\epsilon} \|v(\cdot+z)-v\|_{\mathbf{L^1}} \int \omega_\epsilon(z)\mathrm{d}z = \|\Psi\|_{\mathbf{L}^\infty} C \sup_{|z|\leq\epsilon} \|v(\cdot+z)-v\|_{\mathbf{L^1}}.
\end{aligned}$$

Como la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{L^1}}$ es continua con respecto a traslaciones, concluimos que este término desaparece cuando $\epsilon \downarrow 0$. Para el segundo término utilizamos un argumento similar:

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \|F(u,v)\|_{\mathbf{L}^\infty} \iint \left|\psi\left(\frac{z}{2}+y\right) - \Psi(z+y)\right| \omega_\epsilon(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\leq \|F(u,v)\|_{\mathbf{L}^\infty} \sup_{|z|\leq\epsilon} \left\|\Psi\left(\cdot+\frac{z}{2}\right) - \Psi\right\|_{\mathbf{L^1}} \int \omega_\epsilon(z)\mathrm{d}z \\
&= \|F(u,v)\|_{\mathbf{L}^\infty} \sup_{|z|\leq\epsilon} \left\|\Psi\left(\cdot+\frac{z}{2}\right) - \Psi\right\|_{\mathbf{L^1}}.
\end{aligned}$$

Nuevamente, la última expresión desaparece cuando $\epsilon \downarrow 0$. □

Regresando a la prueba del Teorema, elegimos $\psi(x,t)$ una función test con soporte en $t>0$ y definimos la función test $\phi(x,y,t,s)$ por

$$\phi(x,y,t,s) := \psi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2}\right)\omega_{\epsilon_0}(t-s)\omega_\epsilon(x-y),$$

donde $\epsilon_0 > 0$ y $\epsilon > 0$ son números pequeños. Esta función satisface,

$$\begin{aligned}
\phi_t + \phi_s &= \partial_2\psi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2}\right)\omega_{\epsilon_0}(t-s)\omega_\epsilon(x-y) \\
\phi_x + \phi_y &= \partial_1\psi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2}\right)\omega_{\epsilon_0}(t-s)\omega_\epsilon(x-y).
\end{aligned}$$

Observamos que las derivadas de $\omega_{\epsilon_0}$ y $\omega_\epsilon$, las distribuciones $\delta$ aproximadas, se cancelan. Aplicando el Lema 1.1 a la función $F(u,v)=|u-v|$, $\Psi=\psi_t$ y $F(u,v)=q(u,v)$, $\Psi=\psi_x$, respectivamente, y dejando $\epsilon_0$ y $\epsilon$ tender a cero, obtenemos en virtud de (1.17) del Lema 1.1 la desigualdad,

$$\iint \left(|u(x,t)-v(x,t)|\psi_t + q(u,v)\psi_x\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \geq 0,$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



para dos soluciones débiles $u$ y $v$ y cada función test $\psi$ no negativa con soporte en $t > \epsilon$.

Si hubiésemos considerando (1.14) para el intervalo de tiempo $t \in [0, T]$ y funciones test para los cuales 0 y $T$ pertenece al soporte, la desigualdad de la formulación de Kruzkov implicaría la desigualdad

$$\begin{aligned}
&\iiiint \Big\{ \big|u(x,t) - v(y,s)\big|(\phi_t + \phi_s) + q(u,v)(\phi_x + \phi_y) + q(u,v)(\phi_x + \phi_y) \Big\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s \\
&\quad - \iiint \big|u(x,T) - v(y,s)\big|\phi(x,T,y,s) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s \\
&\quad - \iiint \big|u(x,T) - v(y,T)\big|\phi(x,t,y,T) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t \\
&\quad + \iiint \big|u_0(x) - v(y,s)\big|\phi(x,0,y,s) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s \\
&\quad + \iiint \big|u(x,t) - v_0(y)\big|\phi(x,t,y,0) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t \geq 0.
\end{aligned}$$

Eligiendo la función test como arriba y considerando que estamos integrando solamente sobre la mitad del soporte de las funciones test, obtenemos un factor $1/2$ que multiplica cada uno de los términos de borde para $t = 0$ y $t = T$. Terminamos con,

$$\begin{aligned}
&\iint \Big( \big|u(x,t) - v(x,t)\big|\psi_t + q(u,v)\psi_x \Big) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\
&\quad - \int |u(x,T) - v(x,T)|\psi(x,T) \mathrm{d}x + \int |u_0(x) - v_0(x)|\psi(x,0) \mathrm{d}x \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Para aprovechar esta identidad, escogimos,

$$\psi(x,t) := (\chi_{[-,+Lt+\epsilon, M-Lt-\epsilon]} * \omega_\epsilon)(x), \quad t \in [0,T].$$

Aquí $L = \|f\|_{\mathrm{Lip}}$, $\chi_{[a,b]}$ es la función característica del intervalo $[a,b]$, y $*$ denota el operador de convolución. Aquí elegimos $M$ tan grande que,

$$M - Lt - \epsilon > -M + Lt + 3\epsilon, \quad \text{para } t < T.$$

Para obtener una función test admisible, modificamos la función $\psi$ de tal forma que desaparece suavemente para $t > T$. Para $t < T$ tenemos entonces,

$$\begin{aligned}
\psi_t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-M+Lt+\epsilon}^{M-Lt-\epsilon} \omega_\epsilon(x-y) \mathrm{d}y \\
&= -L(\omega_\epsilon(x - M + Lt + \epsilon) + \omega_\epsilon(x + M - Lt - \epsilon)) \leq 0, \\
\psi_x &= -(\omega_\epsilon(x - M + Lt + \epsilon) - \omega_\epsilon(x + M - Lt - \epsilon)).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



En virtud de nuestra selección de $M$ ambas funciones que aparecen en el lado derecho de (1.19) tienen soportes disjuntos. Por lo tanto,

$$0 = \psi_t + L|\psi_x| \geq \psi_t + \frac{q(u,v)}{|u-v|}\psi_x.$$

Esto significa $|u-v|\psi_t + q(u,v)\psi_x \leq 0$. Insertando esto en (1.18), obtenemos para $\epsilon \to 0$,

$$\int_{-M+Lt}^{M-Lt} |u(x,t) - v(x,t)|\mathrm{d}x \leq \int_{-M}^{M} |u_0(x) - v_0(x)|\mathrm{d}x.$$

Como $u_0 - v_0 \in \mathbf{L^1}$, entonces $u(x,t) = v(x,t)$ para $|x|$ suficientemente grande. Entonces,

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_1 \leq \|u_0 - v_0\|_1. \tag{1.20}$$

□

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



## 1.3. Existencia de la solución

En esta sección nos centraremos en estudiar la convergencia de una sucesión de aproximaciones $\{u_\Delta\}$ de (1.3) generadas por un método de volúmenes finitos. Para esto, derivamos las estimaciones de compacidad necesarias para probar su convergencia haciendo uso del teorema de Helly [23]. Finalmente, mostramos que el límite de la sucesión es una solución débil del problema (1.3). Recalcamos que estudiamos un problema en 1D y usaremos el término "malla" para referirnos a una discretización de nuestro dominio espacio-temporal $\mathbb{R} \times [0, T]$.

### 1.3.1. Método de volúmenes finitos

Introducimos una malla uniforme de ancho $\Delta x$ y paso temporal $\Delta t$ sujeta a una condición CFL que será determinada luego. El dominio espacial es discretizado en celdas uniformes $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, donde $x_{j+1/2} = x_j + \Delta x/2$ son las interfaces de la celda, y $x_j$ son los centros de celda. Sea $t^n = n\Delta t$ el paso temporal y $\lambda = \Delta t/\Delta x$.

Queremos construir una solución aproximada en el sentido de los volúmenes finitos $u_\Delta$ tal que,

$$u_\Delta(x,t) = u_j^n, \quad (x,t) \in I_j \times [t^n, t^{n+1}).$$

Para este fin, aproximamos el dato inicial de la forma,

$$u_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_0(x)dx,$$

y definimos el método de volúmenes finitos de la forma, y el esquema conservativo,

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right), \tag{1.21}$$

donde consideraremos para este trabajo el flujo numérico monótono, propuesto en [24, 17]:

$$F_{j+1/2}^n = u_j^n V(u_{j+1}^n). \tag{1.22}$$

A continuación estudiaremos propiedades que permiten demostrar la existencia de la solución del problema (1.3).

**Lema 1.2.** *El flujo numérico definido en* (1.22) *es monótono.*

*Demostración.* El flujo numérico definido en (1.22) puede ser descrito mediante la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por,

$$F(u,w) = uV(w).$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



De los supuestos vemos que,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} u_0(x) = 0 \quad \text{y} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} u_0(x) = u_{\text{máx}}.$$

Así, nuestro intervalo de referencia es $\mathcal{I} = [0, u_{\text{máx}}]$. Veamos ahora que se satisfacen las tres propiedades de monotonicidad.

- **Consistencia.** Sea $u \in \mathcal{I}$ dado. Es claro que, $F(u,u) = uV(u) = f(u)$. Por lo tanto el flujo numérico $F$ es consistente.

- **Lipschitz-continuidad.** Veamos inicialmente que $F$ es Lipschitz-continua con respecto a la primera variable. En efecto, sean $u_1, u_2 \in \mathcal{I}$ dados. Luego, note que,

  $$|F(u_1,w)-F(u_2,w)| = |u_1V(w)-u_2V(w)| = |V(w)||u_1-u_2| \leq V_{\text{máx}}|u_1-u_2|, \quad \forall w \in \mathcal{I},$$

  esto es,

  $$|F(u_1,w) - F(u_2,w)| \leq L_1|u_1 - u_2|, \quad \forall w \in \mathcal{I},$$

  donde $L_1 = V_{\text{máx}}$ es la constante de Lipschitz con respecto a la primera variable.

  Mostremos ahora que $F$ es Lipschitz-continua con respecto a la segunda variable. En efecto, sean $w_1, w_2 \in \mathcal{I}$ dados. Luego, note que,

  $$|F(u,w_1) - F(u,w_2)| = |uV(w_1) - uV(w_2)| = u|V(w_1) - V(w_2)|.$$

  Ahora, sin pérdida de generalidad asumamos que $w_1 < w_2$. Como $V$ es una función diferenciable en $\mathcal{I}$, entonces por el Teorema del Valor Medio existe $\xi \in (w_1, w_2)$ tal que,

  $$V(w_1) - V(w_2) = V'(\xi)(w_1 - w_2).$$

  Así tenemos que,

  $$|F(u,w_1) - F(u,w_2)| = u|V'(\xi)||w_1 - w_2| \leq u_{\text{máx}}\|V'\|_\infty|w_1 - w_2|, \quad \forall u \in \mathcal{I},$$

  esto es,

  $$|F(u,w_1) - F(u,w_2)| \leq L_2|w_1 - w_2|, \quad \forall u \in \mathcal{I},$$

  donde $L_2 = u_{\text{máx}}\|V'\|_\infty$ es la constante de Lipschitz con respecto a la segunda variable.

  De esta forma vemos que $F$ es Lipschitz-continua con respecto a cada una de sus variables.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



- $\boldsymbol{F(\uparrow,\downarrow)}$**.** Veamos inicialmente que $F$ es creciente con respecto a su primera variable. En efecto, sean $u_1, u_2 \in \mathcal{I}$ dados tales que $u_1 \leq u_2$. Luego, como $V(w) \geq 0$, para cada $w \in \mathcal{I}$, entonces,

$$F(u_1, w) = u_1 V(w) \leq u_2 V(w) = F(u_2, w),$$

esto es, $F(u_1, w) \leq F(u_2, w)$. Así, $F$ es creciente con respecto a su primera variable.

Ahora veamos que $F$ es decreciente con respecto a su segunda variable. En efecto, sean $w_1, w_2 \in \mathcal{I}$ dados tales que $w_1 \leq w_2$. Luego, dado que $V'(w) \leq 0$, para cada $w \in \mathcal{I}$, tenemos que $V$ es decreciente. Por lo tanto, $V(w_2) \leq V(w_1)$. De ese modo,

$$F(u, w_2) = uV(w_2) \leq uV(w_1) = F(u, w_1),$$

es decir, $F(u, w_2) \leq F(u, w_1)$. Así, $F$ es decreciente con respecto a su segunda variable.

De todo lo anterior concluimos que el flujo numérico definido en (1.22) es monótono. □

**Lema 1.3** (Principio del máximo)**.** *Supongamos que los tamaños de paso espacial, $\Delta x$ y temporal, $\Delta t$, están sujetos a la siguiente condición CFL:*

$$\lambda(L_1 + L_2) \leq 1. \tag{1.23}$$

*Entonces, el esquema de volúmenes finitos* (1.21)-(1.22) *satisface el principio del máximo, es decir,*

$$\textit{si } 0 \leq u_0(x) \leq u_{\text{máx}}, \textit{ entonces } 0 \leq u_j^n \leq u_{\text{máx}}, \textit{ para todo } j \in \mathbb{Z} \textit{ y } n \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Probemos el resultado usando inducción sobre $n$. De la hipótesis sabemos que el resultado es cierto para $n = 0$. Supongamos pues que $0 \leq u_j^n \leq u_{\text{máx}}$, para cada $j \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, sea $j \in \mathbb{Z}$ fijo. Por (1.21) obtenemos que,

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda(F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_j^n, u_j^n)) + \lambda(F(u_{j-1}^n, u_j^n) - F(u_j^n, u_j^n)) \\ &= u_j^n + \lambda a_j(u_{j+1}^n - u_j^n) + \lambda b_{j-1}(u_{j-1}^n - u_j^n) \\ &= (1 - \lambda(a_j + b_{j-1}))u_j^n + \lambda a_j u_{j+1}^n + \lambda b_{j-1} u_{j-1}^n, \end{aligned}$$

es decir,

$$u_j^{n+1} = (1 - \lambda(a_j + b_{j-1}))u_j^n + \lambda a_j u_{j+1}^n + \lambda b_{j-1} u_{j-1}^n, \tag{1.24}$$

donde,

$$a_j = -\frac{F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_j^n, u_j^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n}, \quad b_{j-1} = \frac{F(u_{j-1}^n, u_j^n) - F(u_j^n, u_j^n)}{u_{j-1}^n - u_j^n}.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



De la hipótesis inductiva sabemos que $u_j^n \leq u_{\text{máx}}$, $u_{j+1}^n \leq u_{\text{máx}}$ y $u_{j-1}^n \leq u_{\text{máx}}$. Por lo tanto, de (1.24) obtenemos que,

$$u_j^{n+1} \leq (1 - \lambda(a_j + b_{j-1}))u_{\text{máx}} + \lambda a_j u_{\text{máx}} + \lambda b_{j-1} u_{\text{máx}} = u_{\text{máx}},$$

esto es,

$$u_j^{n+1} \leq u_{\text{máx}}. \tag{1.25}$$

De otro lado, por lo probado en *a)* sabemos que $F$ es creciente con respecto a su primera variable y decreciente con respecto a su segunda variable. Por lo tanto, es claro que $a_j \geq 0$ y $b_{j-1} \geq 0$. Además, de la Lipschitz-continuidad de $F$ vemos que,

$$a_j \leq \frac{|F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_j^n, u_j^n)|}{|u_{j+1}^n - u_j^n|} \leq \frac{L_1 |u_{j+1}^n - u_j^n|}{|u_{j+1}^n - u_j^n|} = L_1$$

y,

$$b_{j-1} \leq \frac{|F(u_{j-1}^n, u_j^n) - F(u_j^n, u_j^n)|}{|u_{j-1}^n - u_j^n|} \leq \frac{L_2 |u_{j-1}^n - u_j^n|}{|u_{j-1}^n - u_j^n|} = L_2.$$

De ese modo, empleando (1.23) obtenemos que,

$$\lambda(a_j + b_{j-1}) \leq \lambda(L_1 + L_2) \leq 1,$$

esto es, $1 - \lambda(a_j + b_{j-1}) \geq 0$. Como, $u_j^n \geq 0$, $u_{j+1}^n \geq 0$ y $u_{j-1}^n \geq 0$, entonces de (1.24) se sigue que,

$$u_j^{n+1} \geq 0. \tag{1.26}$$

Finalmente, haciendo uso de (1.25) y (1.26) concluimos que, $0 \leq u_j^{n+1} \leq u_{\text{máx}}$, para cada $j \in \mathbb{Z}$. De esta forma, por inducción matemática se sigue que, $0 \leq u_j^n \leq u_{\text{máx}}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. □

**Lema 1.4** (Lax-Wendroff)**.** *Si la sucesión $u_\Delta$ converge en $\mathbf{L}^1$ a una función $u$, entonces $u$ es solución débil de la ley de conservación* (1.3)*.*

*Demostración.* De las partes *a)* y *b)* vimos que el esquema numérico (1.21)-(1.22) es consistente y conservativo. Supongamos cuando $\Delta \to 0$, satisfaciendo la condición CFL (1.23), la sucesión $u_\Delta$ converge en $\mathbf{L}^1$ a una función $u$. Veamos que $u$ es una solución débil de (1.3).

Sea $f(u) = uV(u)$. Debemos verificar que,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\psi_t u + \psi_x f(u)) dx dt = -\int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) u_0(x) dx, \quad \psi \in C_c^1.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Considere $\psi_j^n = \dfrac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{I_j} \psi(x,t) dx dt$. Multiplicando el método conservativo por $\psi_j^n$ y sumando para cada $j \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ se obtiene que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j^n (u_j^{n+1} - u_j^n) = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j^n (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}).$$

Reorganizando las sumas, y suponiendo que $\psi_j^n = 0$ para $|j|$ o $n$ suficientemente grandes se obtiene que,

$$-\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 u_j^0 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\psi_j^n - \psi_j^{n-1}) u_j^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\psi_{j+1}^n - \psi_j^n) F_{j-1}^n.$$

Observe además que cada suma es finita ya que $\psi \in C_c^1$. Multiplicando por $\Delta x$ y reorganizando las ecuaciones tenemos,

$$0 = \Delta x \Delta t \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\psi_j^n - \psi_j^{n-1}}{\Delta t} \right) u_j^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x} \right) F_{j-1/2}^n \right] + \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j^0 u_j^0.$$

Por la regularidad de $\psi$ y la convergencia $\mathbf{L}^1$ de $u_\Delta$ se tiene que,

$$\Delta x \Delta t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\psi_j^n - \psi_j^{n-1}}{\Delta t} \right) u_j^n \longrightarrow \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_t(x,t) u(x,t) dx dt, \quad \Delta \to 0.$$

De otro lado, utilizando la monotonía del flujo,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x} \right) F_{j-1/2}^n = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x} \right) f(u_j^n) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x} \right) (F_{j-1/2}^n - f(u_j^n)). \end{aligned}$$

Usando la Lipschitz-continuidad del flujo numérico y la propiedad TVD de $u_\Delta$ vemos que,

$$|F_{j-1/2}^n - f(u_j^n)| = |F_{j-1/2}^n(u_{j-1}^n, u_j^n) - F_{j-1/2}^n(u_j^n, u_j^n)| \leq L |u_{j-1}^n - u_j^n| \leq L \, \mathrm{TV}(u_0),$$

por lo cual,

$$\Delta t \Delta x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x} \right) (F_{j-1/2}^n - f(u_j^n)) \longrightarrow 0, \quad \Delta \to 0.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Mientras que usando el hecho que $u_\Delta$ converge a $u$ y la regularidad de $\psi$ se tiene que,

$$\Delta t\Delta x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\psi_{j+1}^n-\psi_j^n}{\Delta x}\right)f(u_j^n)\longrightarrow\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\psi_x f(u)dxdt,\quad \Delta\to 0.$$

□

**Lema 1.5.** *El esquema* (1.21)-(1.22) *es TVD, es decir,*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}}|u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}|\leq\sum_{j\in\mathbb{Z}}|u_{j+1}^n-u_j^n|. \tag{1.27}$$

*Demostración.* En la parte *b)* vimos que el esquema (1.21)-(1.22) puede escribirse de la forma,

$$u_j^{n+1}=u_j^n+\lambda a_j(u_{j+1}^n-u_j^n)-\lambda b_{j-1}(u_j^n-u_{j-1}^n), \tag{1.28}$$

donde,

$$a_j=-\frac{F(u_j^n,u_{j+1}^n)-F(u_j^n,u_j^n)}{u_{j+1}^n-u_j^n},\quad b_{j-1}=\frac{F(u_{j-1}^n,u_j^n)-F(u_j^n,u_j^n)}{u_{j-1}^n-u_j^n}.$$

Además, se mostró que $\lambda a_j\geq 0$, $\lambda b_{j-1}\geq 0$ y $\lambda a_j+\lambda b_{j-1}=\lambda(a_j+b_{j-1})\leq 1$, para cada $j\in\mathbb{Z}$. Por lo tanto, se satisfacen todas las hipótesis del Teorema de Harten (Véase Teorema 5.2 en Anexo 1) y en consecuencia podemos hacer uso de éste para concluir que,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}}|u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}|\leq\sum_{j\in\mathbb{Z}}|u_{j+1}^n-u_j^n|. \tag{1.29}$$

De esta forma vemos que (1.21)-(1.22) es TVD. Veamos además que si $u_0\in\mathbf{BV}(\mathbb{R})$, entonces,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}}|u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}|\leq|u_0|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})}. \tag{1.30}$$

Realicemos inducción sobre $n$. Para ello, probemos inicialmente que,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|u_{j+1}^0-u_j^0|\leq|u_0|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})}.$$

En efecto, observe que si $u_0\in C^1(\mathbb{R})$, entonces,

$$u_{j+1}^0-u_j^0=\frac{1}{\Delta x}\int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x}(u_0(x-\Delta x)-u_0(x))dx=-\int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x}\int_0^1 u_0'(x-s\Delta x)dsdx.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|u^0_{j+1}-u^0_j| &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x}\int_0^1 |u_0'(x-s\Delta x)|dsdx\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_0^1\int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} |u_0'(x-s\Delta x)|dxds\\ &= \int_0^1\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} |u_0'(x-s\Delta x)|dxds\\ &= \int_0^1\int_{\mathbb{R}} |u_0'(x-s\Delta x)|dxds\\ &= \int_0^1 \|u_0'\|_{L^1(\mathbb{R})}ds = \|u_0'\|_{L^1(\mathbb{R})} = |u_0|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

esto es,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|u^0_{j+1}-u^0_j| \le |u_0|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})}.$$

Para el caso general $u_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R})$, se usa un argumento de densidad. Así, vemos que la afirmación es cierta para $n = 0$. Supongamos ahora que es válida para $n$, es decir,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|u^n_{j+1}-u^n_j| \le |u_0|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})}.$$

Luego, empleando (1.27) se sigue que,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|u^{n+1}_{j+1}-u^{n+1}_j| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}}|u^n_{j+1}-u^n_j| \le |u_0|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})}.$$

De esta manera hemos probado (1.30). □

**Observación 1.5.** *Se puede verificar que,*

$$|u_\Delta(t,\cdot)|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})} = \mathrm{TV}(u_\Delta(t,\cdot)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}|u^n_{j+1}-u^n_j|, \tag{1.31}$$

*donde $u_\Delta$ es la función constante a trozos tal que, $u(x,t) = u^n_j$, si $(x,t) \in I_j \times [t^n, t^{n+1})$.*

**Lema 1.6.** *Existe una constante $C$, independiente de $\Delta t$ y $\Delta x$, tal que $|u_\Delta|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R}\times[0,T])} \le C$.*

*Demostración.* De la estimación **BV** en tiempo realizada en clase sabemos que,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta x\sum_{n=0}^{\lfloor T/\Delta x\rfloor}|u^{n+1}_j-u^n_j| \le (T+\Delta t)(L_1+L_2)|u_0|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})}. \tag{1.32}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



**Observación 1.6.** *Se puede verificar que,*

$$|u_\Delta(\cdot,x)|_{\mathbf{BV}([0,T])} = \mathrm{TV}(u_\Delta(\cdot,x)) = \sum_{n=0}^{\lfloor T/\Delta x\rfloor} |u_{j+1}^n - u_j^n|, \tag{1.33}$$

*donde $u_\Delta$ es la función constante a trozos tal que, $u(x,t) = u_j^n$, si $(x,t) \in I_j \times [t^n, t^{n+1})$.*

Ahora bien, empleando (1.30), (1.31), (1.32) y (1.33) obtenemos que,

$$\begin{aligned}
|u_\Delta|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R}\times[0,T])} &\le \int_0^T |u_\Delta(t,\cdot)|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})} dt + \int_{\mathbb{R}} |u_\Delta(\cdot,x)|_{\mathbf{BV}([0,T])} dx \\
&\le \int_0^T \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_{j+1}^n - u_j^n| dt + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta x \sum_{n=0}^{\lfloor T/\Delta x\rfloor} |u_{j+1}^n - u_j^n| \\
&\le T|u_0|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})} + (T+\Delta t)(L_1+L_2)|u_0|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R})} := C.
\end{aligned}$$

Así vemos que existe una constante C tal que $|u_\Delta|_{\mathbf{BV}(\mathbb{R}\times[0,T])} \le C$. □

**Lema 1.7** (Desigualdad discreta de entropía)**.** *El esquema* (1.21)-(1.22) *satisface la siguiente desigualdad de entropía,*

$$|u_j^{n+1} - k| - |u_j^n - k| + \lambda(G_{j+1/2}(u_j^n, u_{j+1}^n) - G_{j-1/2}(u_{j-1}^n, u_j^n)) \le 0, \quad n \ge 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{1.34}$$

*donde,*

$$a \wedge b := \text{máx}\{a,b\}, \quad a \vee b := \text{mín}\{a,b\},$$

*y,*

$$G_{j+1/2}(a,b) := F(a\wedge k, b\wedge k) - F(a\vee k, b\vee k).$$

*Demostración.* Defina, $H(a,b,c) := b - \lambda(F(b,c) - F(a,b))$. Por la monotonicidad del fujo, $H$ es creciente respecto a todas sus variables en $\mathfrak{I}^3$ y además,

$$H(a,a,a) = a - \lambda(F(a,a) - F(a,a)) = a,$$

esto es, $H(a,a,a) = a$. Además, sabemos que un esquema numérico monótono es de la forma,

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n, u_j^n)).$$

Por lo tanto, de la definición de $H$ vemos que, $u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$.

Luego, sea $k \in [\text{ínf}_{\mathbb{R}}\, u_0, \sup_{\mathbb{R}} u_0]$ dado. Como, $u_{j-1}^n \le u_{j-1}^n \vee k$, $u_j^n \le u_j^n \vee k$, $u_{j+1}^n \le u_{j+1}^n \vee k$, entonces de la monotonicidad de $H$ se sigue que,

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \le H(u_{j-1}^n \vee k, u_j^n \vee k, u_{j+1}^n \vee k). \tag{1.35}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Por otro lado, observe que $k = H(k,k,k)$. Empleando nuevamente la monotonicidad de $H$ se tiene que,

$$k \leq H(u_{j-1}^n \vee k, u_j^n \vee k, u_{j+1}^n \vee k). \tag{1.36}$$

En virtud de (1.35) y (1.36), concluimos que,

$$u_j^{n+1} \vee k \leq H(u_{j-1}^n \vee k, u_j^n \vee k, u_{j+1}^n \vee k). \tag{1.37}$$

Del mismo modo, dado que, $u_{j-1}^n \geq u_{j-1}^n \wedge k$, $u_j^n \geq u_j^n \wedge k$, $u_{j+1}^n \geq u_{j+1}^n \wedge k$, entonces de la monotonicidad de $H$ se sigue que,

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \geq H(u_{j-1}^n \wedge k, u_j^n \wedge k, u_{j+1}^n \wedge k). \tag{1.38}$$

Por otra parte, note que $k = H(k,k,k)$. Usando nuevamente la monotonicidad de $H$ se tiene que,

$$k \geq H(u_{j-1}^n \wedge k, u_j^n \wedge k, u_{j+1}^n \wedge k). \tag{1.39}$$

En virtud de (1.38) y (1.39), concluimos que,

$$u_j^{n+1} \wedge k \geq H(u_{j-1}^n \wedge k, u_j^n \wedge k, u_{j+1}^n \wedge k). \tag{1.40}$$

Restando (1.37) y (1.40) obtenemos que,

$$u_j^{n+1} \vee k - u_j^{n+1} \wedge k \leq H(u_{j-1}^n \vee k, u_j^n \vee k, u_{j+1}^n \vee k) - H(u_{j-1}^n \wedge k, u_j^n \wedge k, u_{j+1}^n \wedge k).$$

Pero, observe que,

$$u_j^{n+1} \vee k - u_j^{n+1} \wedge k = |u_j^{n+1} - k|.$$

Además,

$$H(u_{j-1}^n \vee k, u_j^n \vee k, u_{j+1}^n \vee k) = u_j^n \vee k - \lambda(F(u_j^n \vee k, u_{j+1}^n \vee k) - F(u_{j-1}^n \vee k, u_j^n \vee k));$$
$$H(u_{j-1}^n \wedge k, u_j^n \wedge k, u_{j+1}^n \wedge k) = u_j^n \wedge k - \lambda(F(u_j^n \wedge k, u_{j+1}^n \wedge k) - F(u_{j-1}^n \wedge k, u_j^n \wedge k)).$$

Por lo tanto, si $S = H(u_{j-1}^n \vee k, u_j^n \vee k, u_{j+1}^n \vee k) - H(u_{j-1}^n \wedge k, u_j^n \wedge k, u_{j+1}^n \wedge k)$, entonces,

$$\begin{aligned} S &= u_j^n \vee k - u_j^n \wedge k - \lambda(G_{j+1/2}(u_j^n, u_{j+1}^n) - G_{j-1/2}(u_{j-1}^n, u_j^n)) \\ &= |u_j^n - k| - \lambda(G_{j+1/2}(u_j^n, u_{j+1}^n) - G_{j-1/2}(u_{j-1}^n, u_j^n)). \end{aligned}$$

De ese modo,

$$|u_j^{n+1} - k| \leq |u_j^n - k| - \lambda(G_{j+1/2}(u_j^n, u_{j+1}^n) - G_{j-1/2}(u_{j-1}^n, u_j^n)),$$

es decir,

$$|u_j^{n+1} - k| - |u_j^n - k| + \lambda(G_{j+1/2}(u_j^n, u_{j+1}^n) - G_{j-1/2}(u_{j-1}^n, u_j^n)) \leq 0.$$

□

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



### 1.3.2. Prueba del Teorema principal

**Teorema 1.7.** *Supongamos que $u_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R})$, y que $u_\Delta$ es obtenido mediante el esquema* (1.21)-(1.22) *el cual es monótono y satisface una condición CFL tipo* (1.23)*. Si $\Delta \to 0$, entonces $u_\Delta$ converge a una solución de entropía de la ley de conservación* (1.3) *débilmente en $\mathbf{L}^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R})$ y fuertemente en $\mathbf{L}^p_{loc}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$, para todo $p<+\infty$.*

*Demostración.* como $u_\Delta$ es acotada, de variación total acotada, podemos emplear el Lema de Helly para extraer una subsucesión denotada nuevamente por $u_\Delta$ la cual converge a alguna $u$ débilmente en $\mathbf{L}^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R})$ y fuertemente $\mathbf{L}^p_{\text{loc}}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ para todo $p<+\infty$.

Por Teorema de Lax-Wendroff (Lema 1.4) sabemos que $u$ es una solución débil de (1.3). Resta probar que $u$ es solución de entropía, entonces su unicidad asegura que la sucesión completa converge.

Sea $k\in\mathcal{I}$, $\phi\in C_c^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ una función no negativa y $\psi_j^n$ su versión discreta. Como $u_\Delta$ satisface la desigualdad discreta de entropía (1.34), sumando $j$ y $n$ y reindexando las sumas finitas, se obtene que,

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \sum_{n\geq 0}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta x(|u_j^{n+1}-k|-|u_j^n-k|)\psi_j^n \qquad (1.41)\\
& + \sum_{n\geq 0}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta t(G_{j+1/2}(u_j^n,u_{j+1}^n)-G_{j-1/2}(u_{j-1}^n,u_j^n))\psi_j^n \\
& \geq \sum_{n\geq 1}\Delta t\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta x|u_j^{n+1}-k|\frac{\psi_j^{n+1}-\psi_j^n}{\Delta t} - \sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta x|u_j^0-k|\psi_j^0 \qquad (1.42)\\
& + \sum_{n\geq 0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta t\Delta x G_{j-1/2}(u_{j-1}^n,u_j^n)\frac{\psi_{j-1}^n-\psi_j^n}{\Delta x} - S_1 - S_2 + S_3.
\end{aligned}
$$

Observe que,

$$
\begin{aligned}
G_{j-1/2}(u_{j-1}^n,u_j^n) = & F_{j-1/2}(u_{j-1}^n\wedge k, u_j^n\wedge k) - F_{j-1/2}(u_{j-1}\vee k, u_j^n\vee k)\\
& \pm F_{j-1/2}(u_j^n\wedge k, u_j^n\wedge k) \pm F_{j-1/2}(u_j^n\vee k, u_j^n\vee k).
\end{aligned}
$$

Así, definiendo $f(u)=uV(u)$ y considerando la propiedad de consistencia del flujo numérico y su Lipschitz continuidad, además de la propiedad TVD de $u_0$, se sigue que,

$$
S_3 = \sum_{n\geq 0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta t\Delta x(f(u_j^n\wedge k)-f(u_j\vee k))\frac{\psi_j^n-\psi_{j+1}^n}{\Delta x} + K\Delta x\sum_{n=0}^{\lfloor T/\Delta x\rfloor}\Delta x\sum_{j\in\mathbb{Z}}|u_j^n-u_{j-1}^n|,
$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



donde $K = K(L_1, L_2; \psi)$ y $T > 0$ es tal que, $\text{supp}(\psi) \subset [0, T] \times \mathbb{R}$. Definiendo,

$$\begin{aligned}
\Phi_\Delta &:= \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} \quad \text{sobre } I_j \times [n\Delta t, (n+1)\Delta t), \\
\Psi_\Delta &:= \frac{\psi_j^n - \psi_{j+1}^n}{\Delta x} \quad \text{sobre } I_j \times [n\Delta t, (n+1)\Delta t), \\
\Theta_\Delta &:= \psi_j^0 \quad \text{sobre } I_j, \\
U_\Delta^k &:= |u_j^0 - k| \quad \text{sobre } I_j.
\end{aligned}$$

Por la regularidad de $\psi$ y la definición de $u_j^0$, se tiene que cuando $\Delta \to 0$,

$$\Phi_\Delta \to \partial_t \psi, \text{ y } \Psi_\Delta \to -\partial_x \psi \text{ uniformemente en } [0, +\infty) \times \mathbb{R}.$$

$$\Theta_\Delta \to \psi(0, \cdot) \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \text{ y } U_\Delta^k \to |u_0 - k| \text{ en } \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Notar que $\Phi_\Delta, \Psi_\Delta$ y $\Theta_\Delta$ se anulan fuera de cualquier conjunto compacto, por lo tanto, la ecuación (1.41) puede ser escrita como,

$$\begin{aligned}
0 \geq &\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |u_\Delta - k| \Phi_\Delta(t, x) dt dx - \int_{\mathbb{R}} U_\Delta^{0,k} \Theta_\Delta(x) dx \\
&+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [f(u_\Delta \wedge k) - f(u_\Delta \vee k)] \Psi_\Delta(t, x) dt dx + \mathcal{O}(\Delta x).
\end{aligned}$$

La convergencia fuerte en $\mathbf{L}^1_{\text{loc}}([0, +\infty) \times \mathbb{R})$ de $u_\Delta$ permite pasar al límite y concluir que $u$ satisface la condición de entropía. □

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



## 1.4. Experimentos numéricos

**Ejemplo 1.8.** *Consideremos el siguiente problema de valor inicial,*

$$\begin{cases} u_t + (2u(1-u)^2))_x = 0, & x \in [-2,4], \quad t > 0, \\ u(x,0) = \chi_{[-\frac{3}{2},0]}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vemos que esta ley de conservación tiene flujo $f(u) = 2u(1-u)^2 = uV(u)$, con $V(u) = 2(1-u)^2$ y el dato inicial consiste de dos problemas de Riemann puestos en $x_1 = -3/2$ y $x_2 = 0$ en el tiempo $t = 0$. Hallemos la solución de entropía del problema.

- El problema de Riemann definido en $x_1 = -3/2$ en el instante $t = 0$ tiene los estados a izquierda y a derecha dados por, $u_L = 0$ y $u_R = 1$, respectivamente. Como $u_L < u_R$, la solución es un choque. Obtenemos para $x$ cerca de $x_1$ y $t > 0$ suficientemente pequeño, la siguiente solución,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_1(t) := x_1 + s_1 t, \\ 1 & \text{para } x \geq x_1(t), \end{cases} \tag{1.43}$$

  donde,

$$s_1 = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0.$$

- Del mismo modo, el problema de Riemann definido en $x_2 = 0$ al instante $t = 0$ tiene los estados a izquierda y a derecha, $u_L = 1$ y $u_R = 0$, respectivamente. Como $u_L > u_R$, se toma la envoltura convexa superior, por lo cual la solución está compuesta por una rarefacción entre $u_L = 1$ y un punto $u^*$ seguida de un choque entre $u^*$ y $u_R = 0$, donde $u^*$ satisface que,

$$\begin{aligned} f'(u^*) = \frac{f(1) - f(u^*)}{1 - u^*} &\iff 2(1-u^*)(1-3u^*) = \frac{-2u^*(1-u^*)^2}{1-u^*} \\ &\iff 1 - 3u^* = -(1-u^*) = u^* - 1 \\ &\iff 4u^* = 2 \\ &\iff u^* = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

  Necesitamos hallar la inversa de la derivada del flujo. Tenemos que,

$$f'(u) = 2(1-u)(1-3u).$$

  Luego, si $z = 2(1-u)(1-3u)$, entonces

$$6u^2 - 8u + (2 - z) = 0 \iff u = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(6)(2-z)}}{12} = \frac{4 \pm \sqrt{4 + 6z}}{6}.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Como $f'(u^*) = -\frac{1}{2}$, entonces debemos tener que $(f')^{-1}(-\frac{1}{2}) = u^*$. Por lo tanto,

$$(f')^{-1}(z) = \frac{4 \pm \sqrt{4+6z}}{6}.$$

Obtenemos para $x$ cerca de $x_2$ y $t > 0$ suficientemente pequeño, la siguiente solución,

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < x_2(t) := x_2 + f'(u^*)t, \\ \dfrac{4 - \sqrt{4+6\left(\frac{x}{t}\right)}}{6} & \text{para } x_2(t) \leq x \leq x_3(t) = x_2 + f'(u_R)t, \\ 0 & \text{para } x \geq x_3(t). \end{cases} \tag{1.44}$$

- Vemos que los frentes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ producen una única colisión. Esta se realiza al instante obtenido resolviendo, $x_1 + s_1 t = x_2 + f'(u^*)t$, es decir para,

$$-\frac{3}{2} = -\frac{t}{2} \Longrightarrow t = 3.$$

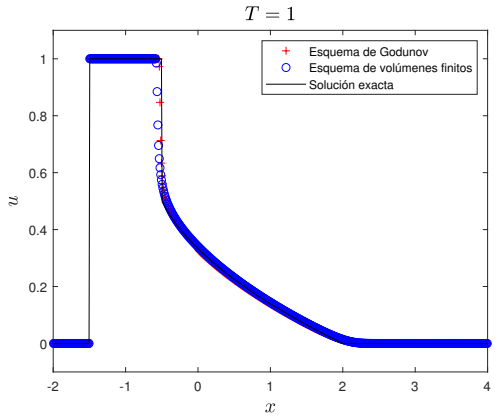
- Resumiendo las soluciones (1.43) y (1.44) para los problemas de Riemann individuales, obtenemos la siguiente solución para $t < 3$,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -\frac{3}{2}, \\ 1 & \text{para } -\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{t}{2}, \\ \dfrac{4 - \sqrt{4+6\left(\frac{x}{t}\right)}}{6} & \text{para } -\frac{t}{2} \leq x \leq 2t, \\ 0 & \text{para } x > 2t. \end{cases} \tag{1.45}$$

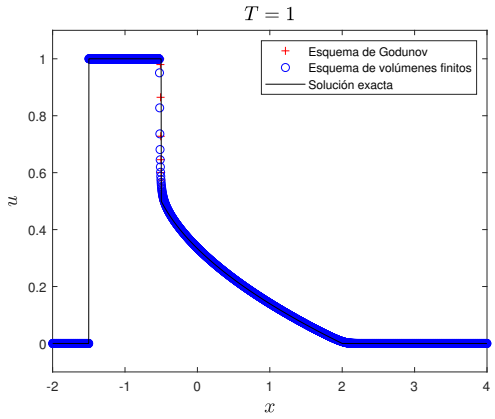
Para este caso vemos que, $L_1 = V_{\text{máx}} = 2$ y $L_2 = u_{\text{máx}}\|V'\|_\infty = 4$. Por lo tanto, de la condición CFL (4.1) obtenemos la cota, $\lambda \leq 1/6$. Escojemos $\lambda = 1/6$. Los resultados numéricos obtenidos se muestran en las figuras subsecuentes.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

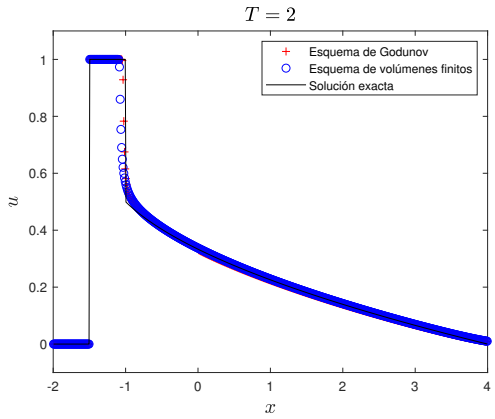




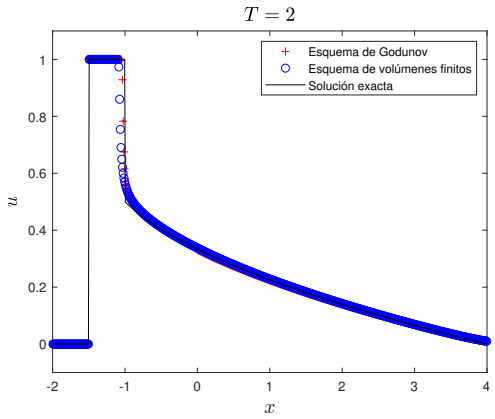

(a) Esquema (1.21)-(1.22), Godunov y solución exacta con $\Delta x = 1/100$ en $t = 1$.




(b) Esquema (1.21)-(1.22), Godunov y solución exacta con $\Delta x = 1/400$ en $t = 1$.




(c) Esquema (1.21)-(1.22), Godunov y solución exacta con $\Delta x = 1/100$ en $t = 2$.




(d) Esquema (1.21)-(1.22), Godunov y solución exacta con $\Delta x = 1/400$ en $t = 2$.

**Ejemplo 1.9.** *Consideremos el siguiente problema de valor inicial,*

$$\begin{cases} u_t + (2u(1-u)^2))_x = 0 = 0, & x \in [-1,1], \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0.5(1+\sin(\pi x)), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Queremos deducir una versión de orden 2 del método (1.21)-(1.22) para aproximar numéricamente el problema. Empleamos una estrategia de discretización tipo MUSCL y hacemos uso de una diferenciación temporal tipo Runge Kutta. Para implementarlo, aproximamos $u(x,t^n)$ mediante funciones lineales a trozos en cada celda, es decir, $\hat{u}_j(x,t^n) = u_j^n + \sigma_j^n(x - x_j)$, donde las pendientes $\sigma_j^n$ son calculadas usando el limitador minmod generalizado, esto es,

$$\sigma_j^n = \text{minmod}(u_{j+1}^n - u_j^n, u_j^n - u_{j-1}^n),$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



donde,

$$\text{minmod}(a,b) := \begin{cases} \text{sgn}(a)\,\text{mín}\{|a|,|b|\} & \text{si } \text{sgn}(a) = \text{sgn}(b), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta extrapolación permite definir los valores a derecha e izquierda en las celdas dados por,

$$\begin{aligned} u^L_{j+1/2} &:= \hat{u}_j(x_j + \Delta x/2, t^n) = u^n_j + \sigma^n_j \Delta x/2 \\ u^R_{j-1/2} &:= \hat{u}_j(x_j - \Delta x/2, t^n) = u^n_j - \sigma^n_j \Delta x/2, \end{aligned}$$

respectivamente.

Si escribimos nuestro esquema con Euler de primer orden para la diferenciación temporal y diferenciación espacial formal de segundo orden como,

$$u^{n+1}_j = u^n_j - \lambda L_j(u^n) := u^n_j - \lambda(F^n_{j+1/2} - F^n_{j-1/2}), \tag{1.46}$$

donde $F_{j+1/2} = u^L_{j+1/2} V(u^R_{j+1/2})$. Entonces la versión RK toma la siguiente forma de dos pasos,

$$\begin{cases} u^{(1)}_j & = u^n_j - \lambda L_j(u^n) \\ u^{n+1}_j & = \frac{1}{2}(u^n_j + u^{(1)}_j) - \frac{\lambda}{2} L_j(u^{(1)}_j). \end{cases}$$

Se usó un esquema de Godunov de orden 2 para obtener la solución de referencia. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos en los que se evidencia el segundo orden del esquema propuesto.

| $\Delta x$ | $\|e\|_\infty$ | $\log_2(\|e_1\|/\|e_2\|)$ |
|---|---|---|
| $1/100$ | $1.54e-04$ | - |
| $1/200$ | $4.10e-05$ | 1.913 |
| $1/400$ | $1.08e-05$ | 1.914 |
| $1/800$ | $2.80e-06$ | 1.956 |
| $1/1600$ | $7.01e-07$ | 1.998 |
| $1/3200$ | $1.55e-07$ | 2.176 |

Cuadro 1.1: Error numérico en norma $\mathbf{L}^\infty$ en $t = 0.05$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



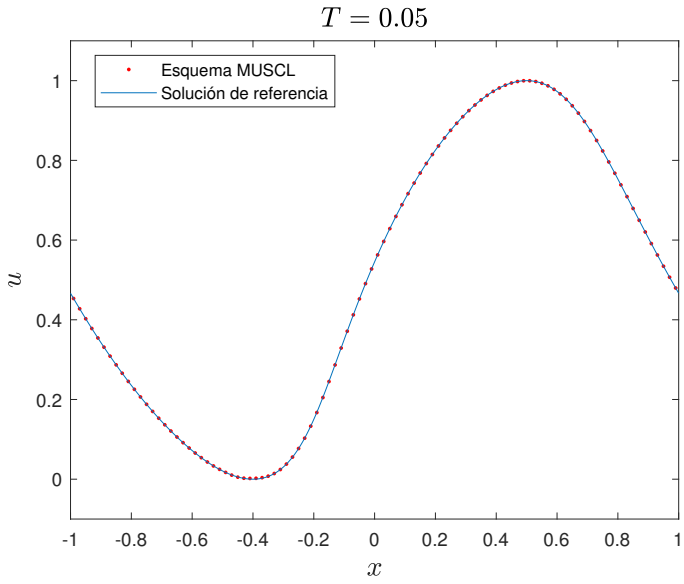



Figura 1.1: Esquema MUSCL (1.46) y solución de referencia en $t = 0.05$.

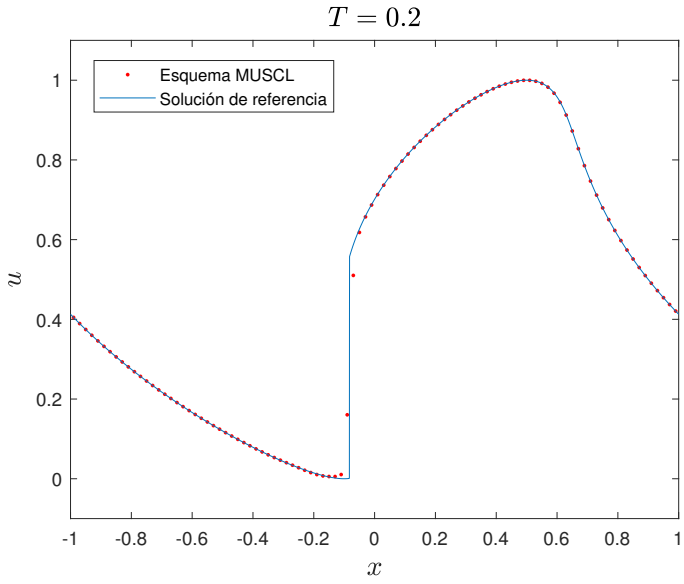



Figura 1.2: Esquema MUSCL (1.46) y solución de referencia en $t = 0.2$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



## 1.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se demostró la existencia y unicidad de la ley de conservación (1.3) asumiendo los supuestos (1.6) y haciendo uso del esquema numérico (1.21)-(1.22) el cual aprovecha la forma en la que está escrita el flujo, esta es, $f(\phi) = \phi V(\phi)$, lo cual presenta ventajas con respecto a los esquemas numéricos tradicionales empleados para resolver este tipo de ecuaciones, lo cual es corroborado en los experimentos numéricos presentados. De igual manera es posible extender este esquema a un esquema de segundo orden.

Este modelo puede ser utilizado para una gran variedad de aplicaciones, entre ellas, dinámica de tráfico vehicular, problemas de sedimentación, dinámica poblacional, etc.

Cabe resaltar que aún hay preguntas abiertas respecto al esquema numérico utilizado, por ejemplo, ¿es posible extenderlo a esquemas de alto orden de aproximación empleando aproximaciones tipo WENO?¿o a esquemas en 2D?

En el Capítulo 3 haremos uso de las ventajas de este esquema numérico considerando una función de flujo que tiene discontinuidades con respecto al espacio.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Capítulo 2

# Modelamiento matemático de un CCD

En este capítulo presentamos un modelo matemático para describir un circuito CCD introducido en el Capítulo 1. Se presentará una descripción de los *caudales* presentes en el modelo, del mismo modo, describiremos la ley de conservación que rige cada clarificador-espesador del circuito así como el transporte entre cada una de las unidades. Finalizaremos definiendo una solución de entropía para el sistema de leyes de conservación asociadas al CCD.

## 2.1. Caudales

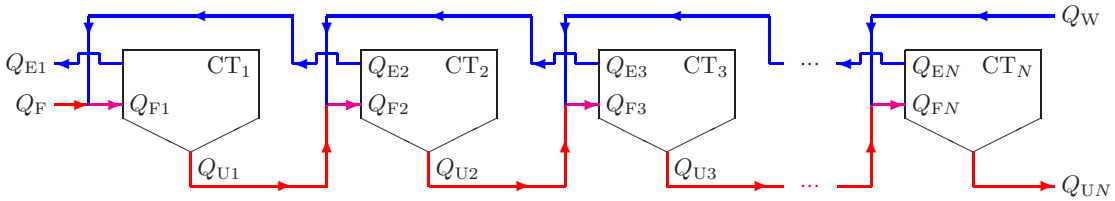



Figura 2.1: Un circuito de decantación a contracorriente compuesto de $N$ clarificadores-espesadores.

Consideremos un arreglo espacial de $N$ clarificadores-espesadores, denotados por $\mathrm{CT}_1, \ldots, \mathrm{CT}_N$, como se indica en la Figura 2.1. Asumimos que todos los **caudales** son cantidades no negativas y que en cualquier momento tenemos conservación de la mezcla en cada uno de los CTs, esto es,

$$Q_{\mathrm{F}i} = Q_{\mathrm{E}i} + Q_{\mathrm{U}i}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.1}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



donde $Q_{\mathrm{F}i}$, $Q_{\mathrm{E}i}$ y $Q_{\mathrm{U}i}$ denotan las tasas volumétricas de concentración, efluente y desbordamiento, respectivamente, de $\mathrm{CT}_i$, $i = 1, \ldots, N$. El flujo volumétrico de alimentación de $\mathrm{CT}_1$ es la suma de el flujo externo de alimentación $Q_{\mathrm{F}}$ y del flujo volumétrico de efluente de $\mathrm{CT}_2$ (para $N \geq 2$) o del flujo volumétrico de agua de lavado (para $N = 1$).

$$Q_{\mathrm{F}1} = \begin{cases} Q_{\mathrm{F}} + Q_{\mathrm{W}} & \text{si } N = 1, \\ Q_{\mathrm{F}} + Q_{\mathrm{E}2} & \text{si } N \geq 2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Para $\mathrm{CT}_i$ con $i = 2, \ldots, N-1$, la tasa volumétrica de alimentación $Q_{\mathrm{F}i}$ es igual al desbordamiento que viene de $\mathrm{CT}_{i-1}$ más el efluente proveniente de $\mathrm{CT}_{i+1}$, esto es,

$$Q_{\mathrm{F}i} = Q_{\mathrm{U},i-1} + Q_{\mathrm{E},i+1}, \quad i = 2, \ldots, N-1. \tag{2.3}$$

La tasa volumétrica de alimentación $Q_{\mathrm{F}N}$ de $\mathrm{CT}_N$ es igual a la tasa de agua de lavado $Q_{\mathrm{W}}$ más el desbordamiento proveniente de $\mathrm{CT}_{N-1}$ (para $N \geq 2$) o la tasa volumétrica de alimentación (para $N = 1$):

$$Q_{\mathrm{F}N} = \begin{cases} Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{F}} & \text{si } N = 1, \\ Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},N-1} & \text{si } N \geq 2. \end{cases} \tag{2.4}$$

Los balances introducidos hasta ahora implican conservación global, esta es

$$Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{F}} = Q_{\mathrm{E}1} + Q_{\mathrm{U}N}. \tag{2.5}$$

Esto se ve inmediatamente para un solo CT ($N = 1$). Para $N \geq 2$ obtenemos de (2.2) y (2.4)

$$Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{F}} = Q_{\mathrm{F}N} - Q_{\mathrm{U},N-1} + Q_{\mathrm{F}1} - Q_{\mathrm{E}2}.$$

Eliminando $Q_{\mathrm{F}N}$ y $Q_{\mathrm{F}1}$ mediante (2.1) obtenemos

$$Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{F}} = Q_{\mathrm{U}N} + Q_{\mathrm{E}1} + (Q_{\mathrm{E}N} - Q_{\mathrm{U},N-1} + Q_{\mathrm{U}1} - Q_{\mathrm{E}2}). \tag{2.6}$$

Para $N = 2$ la expresión en paréntesis es cero y termina la prueba. Para $N \geq 3$, note que igualando los lados derechos de (2.1) y (2.3) para $i = 2, \ldots, N-1$ y reordenando términos, se sigue que

$$Q_{\mathrm{E},i+1} - Q_{\mathrm{U}i} - (Q_{\mathrm{E}i} - Q_{\mathrm{U},i-1}) = 0, \quad i = 2, \ldots, N-1,$$

por lo tanto

$$Q_{\mathrm{E}N} - Q_{\mathrm{U},N-1} + Q_{\mathrm{U}1} - Q_{\mathrm{E}2} = \sum_{i=2}^{N-1} \big(Q_{\mathrm{E},i+1} - Q_{\mathrm{U}i} - (Q_{\mathrm{E}i} - Q_{\mathrm{U},i-1})\big) = 0.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Vale destacar que (2.5) es satisfecha para cualquier elección de $Q$-flujos que cumplan (2.1)–(2.4). En efecto, supongamos que los flujos $Q_{\mathrm{F}}$ y $Q_{\mathrm{W}}$ son dados y que estamos interesados en el número de grados de libertad para elegir $3N$ variables $Q_{\mathrm{F}i}$, $Q_{\mathrm{U}i}$ y $Q_{\mathrm{E}i}$ para $i = 1, \ldots, N$. Luego notamos que (2.1)–(2.4) constituyen dos ecuaciones escalares independientes para $N = 1$, cuatro ecuaciones para $N = 2$ y $2N$ ecuaciones para $N \geq 3$. Esto es, para todo $N$, uno puede elegir $N$ de los caudales que forman el circuito; por supuesto esto debe ocurrir dentro de ciertos límites que aseguren que todos los flujos son no negativos.

Ahora, notemos que de (2.1) y (2.3) resulta el sistema de ecuaciones:

$$Q_{\mathrm{E}1} + Q_{\mathrm{U}1} = Q_{\mathrm{E}2} + Q_{\mathrm{F}} \tag{2.7}$$

$$Q_{\mathrm{E},i} + Q_{\mathrm{U},i} = Q_{\mathrm{E},i+1} + Q_{\mathrm{U},i-1}, \quad i = 2, \ldots, N-1 \tag{2.8}$$

$$Q_{\mathrm{E}N} + Q_{\mathrm{U}N} = Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},N-1} \tag{2.9}$$

Normalmente, los caudales $Q_{\mathrm{F}}$ y $Q_{\mathrm{W}}$ son dados, pues estas cantidades provienen de plantas de tratamiento de las cuales podemos obtener esta información. Además, una observación pertinente es que podemos considerar los caudales de desbordamiento $Q_{\mathrm{U},i}$ como parámetros libres, pues en la práctica, estas cantidades son controlables en cada CTs por medio de llaves que regulan la cantidad de sedimento que sale de cada unidad. Así, de (2.9) obtenemos que,

$$Q_{\mathrm{E}N} = Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},N-1} - Q_{\mathrm{U}N}. \tag{2.10}$$

Para $i = N - 1$, de (2.8) y (2.10) obtenemos que,

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{E},N-1} &= Q_{\mathrm{E}N} + Q_{\mathrm{U},N-2} - Q_{\mathrm{U},N-1} \\ &= (Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},N-1} - Q_{\mathrm{U}N}) + Q_{\mathrm{U},N-2} - Q_{\mathrm{U},N-1} \\ &= Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},N-2} - Q_{\mathrm{U}N}, \end{aligned}$$

esto es,

$$Q_{\mathrm{E},N-1} = Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},N-2} - Q_{\mathrm{U}N}. \tag{2.11}$$

Similarmente, para $i = N - 2$ de (2.8) y (2.11), se sigue que,

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{E},N-2} &= Q_{\mathrm{E},N-1} + Q_{\mathrm{U},N-3} - Q_{\mathrm{U},N-2} \\ &= (Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},N-2} - Q_{\mathrm{U}N}) + Q_{\mathrm{U},N-3} - Q_{\mathrm{U},N-2} \\ &= Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},N-3} - Q_{\mathrm{U}N}, \end{aligned}$$

es decir,

$$Q_{\mathrm{E},N-2} = Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},N-3} - Q_{\mathrm{U}N}. \tag{2.12}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Procediendo de esta forma vemos que,

$$Q_{\mathrm{E},i} = Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},i-1} - Q_{\mathrm{U}N}, \quad i = 2, \ldots, N. \tag{2.13}$$

También, de (2.7) y (2.13) se sigue que,

$$Q_{\mathrm{E}1} = Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{F}} - Q_{\mathrm{U}N}. \tag{2.14}$$

Dado que asumimos que todos los caudales son no negativos, de las ecuaciones (2.13) y (2.14) resultan las restricciones:

$$0 \leq Q_{\mathrm{U}N} \leq \min_{i=2,\ldots,N}(Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{U},i-1})$$
$$0 \leq Q_{\mathrm{U}N} \leq Q_{\mathrm{W}} + Q_{\mathrm{F}}.$$

Por lo tanto, encontramos la siguiente región de admisibilidad:

$$\mathcal{O} = \left\{(Q_{\mathrm{U}1}, \ldots, Q_{\mathrm{U}N}) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^N : 0 \leq Q_{\mathrm{U}N} \leq Q_{\mathrm{W}} + \min\{Q_{\mathrm{U}1}, \ldots, Q_{\mathrm{U},N-1}, Q_{\mathrm{F}}\}\right\}.$$

Si los $Q_{\mathrm{U}i} \geq 0$, son dados, en esta región se garantiza que $Q_{\mathrm{E}i} \geq 0$, para cada $i = 1, 2, \ldots, N$.

## 2.2. Modelo del clarificador-espesador

Asumimos que todos los CTs son idénticos, que tienen área transversal $A$ y que ocupan el intervalo de profundidad $z \in [-H, B]$. Asuma que los índices $i$ denotan todas las cantidades pertenecientes a $\mathrm{CT}_i$, $i = 1, \ldots, N$, y definimos las velocidades

$$q_{\mathrm{U}i} := Q_{\mathrm{U}i}/A, \quad q_{\mathrm{E}i} := Q_{\mathrm{E}i}/A, \quad q_{\mathrm{F}i} := Q_{\mathrm{F}i}/A, \quad i = 1, \ldots, N,$$

y asumamos que $\phi_{\mathrm{F}i}(t)$ es la concentración de alimentación de $\mathrm{CT}_i$. Más aún, supongamos que $f = f(\phi)$ es la función no negativa de sedimentación obstaculizada por bloques que caracteriza la suspensión bajo estudio, véase por ejemplo (1.4) y (1.5) en el Capítulo 1. Entonces, la ecuación gobernante de $\mathrm{CT}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ es la siguiente ley de conservación con flujo discontinuo y término fuente singular:

$$\partial_t \phi_i + \partial_z g_i(\phi_i, z) = \delta(z) q_{\mathrm{F}i}(t) \phi_{\mathrm{F}i}(t), \quad z \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{2.15}$$

$$g_i(\phi_i, z) = \begin{cases} -q_{\mathrm{E}i}\phi_i & \text{para } z < -H, \\ -q_{\mathrm{E}i}\phi_i + f(\phi_i) & \text{para } -H < z < 0, \\ q_{\mathrm{U}i}\phi_i + f(\phi_i) & \text{para } 0 < z < B, \\ q_{\mathrm{U}i}\phi_i & \text{para } z > B, \end{cases} \tag{2.16}$$

donde $\delta(\cdot)$ es la una unidad de masa de Dirac ubicada en $z = 0$. La concentración de alimentación $\phi_{\mathrm{F}i}(t)$ de $\mathrm{CT}_i$ depende de la concentración aplicada y los flujos de agua de lavado, así como de los efluentes y desbordamientos de los CTs vecinos, como se explicará en la siguiente sección.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



## 2.3. Transferencia entre clarificadores-espesadores

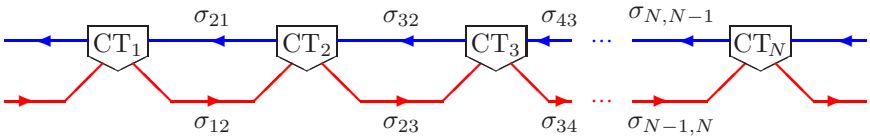



Figura 2.2: Esquematización de la longitud de los tubos que conectan los CTs.

En lo que sigue, y para describir la transferencia entre las unidades individuales que forman la red, asumiremos que el circuito puede ser representado como una red como la que se muestra en la Figura 2.2. Esto es, asumimos que las unidades se consideran como "nodos" en el espacio, y que además de las entradas de alimentación y de agua de lavado, la salida de efluente de $\mathrm{CT}_1$ y la salida de desbordamiento de $\mathrm{CT}_N$, los CTs internos ($\mathrm{CT}_2$ a $\mathrm{CT}_{N-1}$) están enlazados con sus vecinos por cuatro tubos. El propósito de la Figura 2.2 es introducir la nomenclatura de la longitud de los tubos: denotamos por $\sigma_{i,i+1}$ la longitud del tubo que conecta el desbordamiento de $\mathrm{CT}_i$ con el nivel de alimentación de $\mathrm{CT}_{i+1}$ y por $\sigma_{i+1,i}$ la longitud del tubo que conecta el efluente de $\mathrm{CT}_{i+1}$ con el nivel de alimentación de $\mathrm{CT}_i$. Por lo tanto asumimos que cada uno de los tubos es asociado con un diámetro $A_{i,i+1}$ o $A_{i+1,i}$ (indexado como la correspondiente longitud). Para la construcción del modelo estamos interesados ahora en el tiempo de viaje a través de cada tubo. Este tiempo depende de la longitud y el diámetro de cada tubo así como los correspondientes $Q-$flujos que rigen el flujo a través del tubo. Si definimos $\tau_{i,i\pm1}$ como el tiempo de viaje del tubo que tiene longitud $\sigma_{i,i\pm1}$ y diámetro $A_{i,i\pm1}$, obtenemos la siguiente expresión si asumimos que todos los $Q-$flujos son constantes en tiempo:

$$\tau_{i,i+1} = \frac{Q_{\mathrm{U}i}}{A_{i,i+1}}\sigma_{i,i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{2.17}$$

$$\tau_{i,i-1} = \frac{Q_{\mathrm{E}i}}{A_{i,i-1}}\sigma_{i,i+1}, \quad i = 2, \ldots, N. \tag{2.18}$$

Por otro lado, si los $Q-$flujos son variables en tiempo, entonces debemos ser más precisos y denotar por $\tau_{i,i+1}(t)$ and $\tau_{i,i-1}(t)$ el tiempo de transito de una partícula o elemento del fluido que llegue a $\mathrm{CT}_i$ en el tiempo $t$. Por ejemplo, si definimos la función invertible

$$\theta \mapsto X(\theta; t) = \sigma_{i,i+1} - \int_{t-\theta}^{t} \frac{Q(\tau)}{A_{i,i+1}}\,\mathrm{d}\tau,$$

entonces $\tau_{i,i+1}(t) = (X(\cdot; t))^{-1}(0)$; $\tau_{i,i-1}(t)$ se define de forma análoga.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Esta información puede ser incorporada de dos formas diferentes. Una opción, la cual dará origen al Modelo 1 es incorporar estas cantidades como retardos en el modelo del circuito CCD. Una segunda opción (Modelo 2) es resolver explícitamente ecuaciones de transporte para el transporte de la mezcla en los distintos tubos. El último enfoque puede ser adecuado en caso de que estemos interesados en añadir otros procesos que pueden llevarse a cabo durante el transporte en estos tubos, tales como reacciones químicas biocinéticas.

Enfoquemonos ahora en el Modelo 1. Para ello, denotamos por $\phi_i((-H)^-,t)$ y $\phi_i(B^+,t)$ las concentraciones de efluente y desbordamiento de $\mathrm{CT}_i$ en el tiempo $t$. Estas cantidades no son dadas, pero son parte de la solución del problema, y estas surgen "inmediatamente afuera" de la unidad; en particular, estas cantidades satisfacen las condiciones de salto

$$g_i\big(\phi_i(z^-,t),z^-\big)=g_i\big(\phi_i(z^+,t),z^+\big),\quad i=1,\dots,N$$

para $z=-H$ o $z=B$. Para $\mathrm{CT}_1$, el flujo de concentración total de sólidos es

$$Q_{\mathrm{F}1}\phi_{\mathrm{F}1}(t)=Q_{\mathrm{F}}\phi_{\mathrm{F}}(t)+Q_{\mathrm{E}2}\phi_2\big((-H)^-,t-\tau_{21}(t)\big),$$

por lo tanto, la concentración de alimentación es

$$\phi_{\mathrm{F}1}(t)=\frac{1}{Q_{\mathrm{F}1}}\Big(Q_{\mathrm{F}}\phi_{\mathrm{F}}(t)+Q_{\mathrm{E}2}\phi_2\big((-H)^-,t-\tau_{21}(t)\big)\Big). \tag{2.19}$$

Para $\mathrm{CT}_i$, $i=2,\dots,N-1$, obtenemos

$$Q_{\mathrm{F}i}\phi_{\mathrm{F}i}(t)=Q_{\mathrm{U},i-1}\phi_{i-1}\big(B^+,t-\tau_{i-1,i}(t)\big)+Q_{\mathrm{E},i+1}\phi_{i+1}\big((-H)^-,t-\tau_{i+1,i}(t)\big),$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{F}i}(t)=\frac{1}{Q_{\mathrm{F}i}}\Big(&Q_{\mathrm{U},i-1}\phi_{i-1}\big(B^+,t-\tau_{i-1,i}(t)\big)\\&+Q_{\mathrm{E},i+1}\phi_{i+1}\big((-H)^-,t-\tau_{i+1,i}(t)\big)\Big),\quad i=2,\dots,N-1,\end{aligned} \tag{2.20}$$

y finalmente

$$Q_{\mathrm{F}N}\phi_{\mathrm{F}N}(t)=Q_{\mathrm{U},N-1}\phi_{N-1}\big(B^+,t-\tau_{N-1,N}(t)\big)+Q_{\mathrm{W}}\phi_{\mathrm{W}}(t).$$

Aquí $\phi_{\mathrm{W}}(t)$ es la concentración dependiente del tiempo de sólidos del agua de lavado entrante. Para líquidos puros, tenemos, por supuesto, $\phi_{\mathrm{W}}\equiv 0$, pero nos gustaría ser capaces de tratar la (al menos, teórica) posibilidad de alimentar también sólidos "desde la derecha". En cualquier caso obtenemos

$$\phi_{\mathrm{F}N}(t)=\frac{1}{Q_{\mathrm{F}N}}\Big(Q_{\mathrm{U},N-1}\phi_{N-1}\big(B^+,t-\tau_{N-1,N}(t)\big)+Q_{\mathrm{W}}\phi_{\mathrm{W}}(t)\Big). \tag{2.21}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Para simplificar el análisis y siguiendo las ideas expuestas en [2], expresamos el flujo $g_i$ de tal forma que dependa de tres parámetros $\gamma_i^1(z)$, $\gamma_i^2(z)$ y $\gamma_i^3(z)$, el cual podemos escribir de forma vectorial por brevedad:

$$\boldsymbol{\gamma_i}(z) := (\gamma_i^1(z), \gamma_i^2(z), \gamma_i^3(z)).$$

Entonces,

$$g_i(\phi_i, z) := f_i(\phi_i, \boldsymbol{\gamma_i}(z)) := [\gamma_i^1(z) + \gamma_i^2(z)]\phi_i + \gamma_i^3(z) f(\phi_i),$$

con

$$\gamma_i^1(z) := \begin{cases} -q_{\mathrm{E}i} & \text{para } z < 0, \\ 0 & \text{para } z > 0, \end{cases} \quad \gamma_i^2(z) := \begin{cases} 0 & \text{para } z < 0, \\ q_{\mathrm{U}i} & \text{para } z > 0, \end{cases}$$

$$\gamma_i^3(z) := \begin{cases} 1 & \text{para } z \in (-H, B), \\ 0 & \text{para } z \notin (-H, B). \end{cases}$$

Más aún, (2.15) puede ser escrito como,

$$\partial_t \phi_i + \partial_z(f_i(\phi_i, \boldsymbol{\gamma_i})) = \delta(z)\mathcal{S}_i(\boldsymbol{\phi}, t, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.22}$$

donde, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_N)$, $\boldsymbol{\tau}_1 = (\tau_{12}, \tau_{23}, \ldots, \tau_{N-1,N})$, $\boldsymbol{\tau}_2 = (\tau_{21}, \tau_{32}, \ldots, \tau_{N,N-1})$ y

$$\mathcal{S}_i(\boldsymbol{\phi}, t, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = \begin{cases} \frac{q_{\mathrm{F}1}}{Q_{\mathrm{F}1}}\Big(Q_{\mathrm{F}}\phi_{\mathrm{F}}(t) + Q_{\mathrm{E}2}\phi_2\big((-H)^-, t - \tau_{21}(t)\big)\Big) & \text{para } i = 1, \\ \frac{q_{\mathrm{F}i}}{Q_{\mathrm{F}i}}\Big(Q_{\mathrm{U},i-1}\phi_{i-1}\big(B^+, t - \tau_{i-1,i}(t)\big) & \\ \qquad + Q_{\mathrm{E},i+1}\phi_{i+1}\big((-H)^-, t - \tau_{i+1,i}(t)\big)\Big) & \text{para } i = 2, \ldots, N-1, \\ \frac{q_{\mathrm{F}N}}{Q_{\mathrm{F}N}}\Big(Q_{\mathrm{U},N-1}\phi_{N-1}\big(B^+, t - \tau_{N-1,N}(t)\big) + Q_{\mathrm{W}}\phi_{\mathrm{W}}(t)\Big) & \text{para } i = N. \end{cases} \tag{2.23}$$

Sea $\Pi_T = \mathbb{R} \times (0, T)$. El resultado final es un sistema de leyes de conservación débilmente acoplado en el termino fuente que se puede resumir de la siguiente forma

**Problema 2.1** (Problema Principal)**.** *Dados $Q_{\mathrm{F}}$, $Q_{\mathrm{W}}$, $(Q_{\mathrm{U}1}, Q_{\mathrm{U}2}, \ldots, Q_{\mathrm{U}N}) \in \mathcal{O}$, $\phi_{\mathrm{F}} \in [0, 1]$, y $\phi_{\mathrm{W}} \in [0, 1]$ para $t > 0$, hallar $\phi_i(z, t)$ tal que,*

$$\partial_t \phi_i + \partial_z(f_i(\phi_i, \boldsymbol{\gamma}_i)) = \delta(z)\mathcal{S}_i(\boldsymbol{\phi}, t, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2), \ \ (z, t) \in \Pi_T, \ \ i = 1, \ldots, N, \tag{2.24}$$

*donde $S_i$ se define en* (2.23)*, y con condiciones iniciales,*

$$\begin{cases} \phi_1(z, t) = 0, & t \in [-\tau_{21}, 0], \\ \phi_i(z, t) = 0, & t \in [-\min\{\tau_{i-1,i}, \tau_{i,i+1}\}, 0], \ \ 2 \le i \le N-1, \\ \phi_N(z, t) = 0, & t \in [-\tau_{N-1,N}, 0]. \end{cases} \tag{2.25}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



## 2.4. Solución de entropía $\mathbf{BV_t}$

Denotamos por $\mathcal{M}(\Pi_T)$ las medidas finitas de Radon en $\Pi_T$. Definimos el espacio $BV(\Pi_T)$ de funciones de variación acotada por,

$$\mathbf{BV}(\Pi_T) = \{W \in \mathbf{L^1}(\Pi_T) : \partial_x W, \partial_t W \in \mathcal{M}(\Pi_T)\}.$$

En nuestro caso, precisamos definir el espacio $\mathbf{BV_t}(\Pi_T)$, dado por,

$$\mathbf{BV_t}(\Pi_T) = \{W \in \mathbf{L^1}(\Pi_T) : \partial_t W \in \mathcal{M}(\Pi_T)\}.$$

Es claro que no podemos buscar soluciones únicas de entropía en $BV_t(\Pi_T)$, pues las funciones de flujo $g_i$ dependen de forma discontinua de $z$, y por lo tanto, no podemos esperar soluciones $\phi_i$ que pertenezcan a $\mathbf{BV}_x(\Pi_T)$, esto es, que $\partial_x \phi_i$ tenga medida finita.
Sea $\mathcal{J} := \{-H, 0, B\}$ el conjunto de discontinuidades de $g_i$, $i = 1, \ldots, N$. Proponemos la siguiente definición de solución $\mathbf{BV_t}$ de entropía en el sentido de Kružkov, presentada en [2]:

**Definición 2.2.** *Una función medible $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_N) : \Pi_T \to \mathbb{R}^N$ es una solución de entropía $\mathbf{BV_t}$ de (2.15) si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\phi_i \in \mathbf{L^1}(\Pi_T) \cap \mathbf{BV_t}(\Pi_T), \quad \phi_i(z,t) \in [0,1] \quad$ *para c.t.* $(z,t) \in \Pi_T, \quad i = 1, \ldots, N.$

2. *Para todo $\psi \in D(\Pi_T)$, y cada $i = 1, \ldots, N$,*

$$\iint_{\Pi_T} (\phi_i \partial_t \psi + f_i(\phi_i, \boldsymbol{\gamma_i}(z)) \partial_z \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t + \int_0^T \mathcal{S}_i(\boldsymbol{\phi}, t, 0, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \psi(0,t) \mathrm{d}t = 0. \quad (2.26)$$

3. *La siguiente desigualdad de entropía de Kružkov se satisface para cada $\psi \in D(\Pi_T)$, $\psi \geq 0$:*

$$\begin{aligned} &\iint_{\Pi_T} \Big( |\phi_i - c| \partial_t \psi + \operatorname{sgn}(\phi_i - c) \big( f_i(\phi_i, \boldsymbol{\gamma_i}(z)) - f_i(c, \boldsymbol{\gamma_i}(z)) \big) \partial_z \psi \Big) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^T \operatorname{sgn}(\phi_i - c) \mathcal{S}_i(\boldsymbol{\phi}, t, 0, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \psi(0,t) \mathrm{d}t \\ &\quad - \iint_{\Pi_T \setminus \mathcal{J}} \operatorname{sgn}(\phi_i - c) f_i(c, \boldsymbol{\gamma_i}(z))_z \psi \mathrm{d}z \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^T \sum_{m \in \mathcal{J}} |f_i(c, \boldsymbol{\gamma_i}(m^+)) - f_i(c, \boldsymbol{\gamma_i}(m^-))| \psi(m,t) \mathrm{d}t \geq 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, N; \end{aligned} \quad (2.27)$$

4. *La condición inicial se satisface en el siguiente sentido $\mathbf{L^1}$:*

$$\operatorname*{esslim}_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |\phi_i(z,t) - \phi_i^0(z)| \mathrm{d}z = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \quad (2.28)$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



## 2.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó una descripción detallada de los caudales involucrados en el proceso de Decantación a Contracorriente. Se mostró que éstos satisfacen una conservación global y se estableció una región de positividad $\mathcal{O}$, para la cual, si $(Q_{\mathrm{U}1}, \ldots, Q_{\mathrm{U}N}) \in \mathcal{O}$, entonces $Q_{\mathcal{E}i} \geq 0$, para cada $i = 1, \ldots, N$.

Similarmente, se modelaron los CTs que forman el circuito mediante el uso de un sistema de leyes de conservación con flujo discontinuo en espacio y con término fuente el cual describe el acoplamiento de equipos. Se describió la trasferencia entre unidades haciendo énfasis en que es posible realizarla de dos formas, lo cual da origen a dos modelos matemáticos para describir el CCD.

Se propuso una definición de solución de entropía tipo $\mathbf{BV_t}$ la cual tiene en cuenta el acoplamiento de unidades. Como trabajo futuro, se estudiará la unicidad de solución del problema (2.15) haciendo uso de esta definición. En el próximo capítulo analizaremos el caso $N = 1$ y mostraremos que el esquema numérico planteado satisface una desigualdad discreta de entropía análoga a la desigualdad (2.27).

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Capítulo 3

# Existencia de solución del problema para el caso $N = 1$

En este capítulo estudiamos la existencia de solución del problema (2.1) para el caso $N = 1$, esto es, cuando tenemos solamente un clarificador-espesador. Observe que podemos reescribir el lado derecho de (2.15) como:

$$\delta(z)(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}})\phi_{\mathrm{F}}(t) = \partial_z(H(z)(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}})\phi_{\mathrm{F}}(t)),$$

donde $H(z)$ es la función de Heaviside. De este modo expresamos el término fuente singular como una discontinuidad en la función de flujo. Así, obtenemos que la ley de conservación que gobierna nuestro modelo en el caso $N = 1$ viene dada por,

$$\partial_t\phi + \partial_z g(\phi, z, t) = 0, \quad z \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

$$g(\phi, z, t) = \begin{cases} -q_{\mathrm{E}}(\phi - \phi_{\mathrm{F}}(t)) & \text{para } z < -H, \\ -q_{\mathrm{E}}(\phi - \phi_{\mathrm{F}}(t)) + f(\phi) & \text{para } -H < z < 0, \\ q_{\mathrm{U}}(\phi - \phi_{\mathrm{F}}(t)) + f(\phi) & \text{para } 0 < z < B, \\ q_{\mathrm{U}}(\phi - \phi_{\mathrm{F}}(t)) & \text{para } z > B, \end{cases} \tag{3.2}$$

Si definimos,

$$\boldsymbol{\gamma}(z) := (\gamma_1(z), \gamma_2(z)),$$

entonces podemos escribir,

$$g(\phi, z, t) := f(\phi, \boldsymbol{\gamma}(z), t) := \gamma_1(z)(\phi - \phi_{\mathrm{F}}(t)) + \gamma_2(z)f(\phi),$$

con

$$\gamma_1(z) := \begin{cases} -q_{\mathrm{E}} & \text{para } z < 0, \\ q_{\mathrm{U}} & \text{para } z > 0, \end{cases} \quad \gamma_2(z) := \begin{cases} 1 & \text{para } z \in (-H, B), \\ 0 & \text{para } z \notin (-H, B). \end{cases}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



La definición de solución de entropía para el problema (3.1) viene dada por:

**Definición 3.1.** *Una función medible $\phi : \Pi_T \to \mathbb{R}$ es una solución de entropía $BV_t$ de* (3.1) *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\phi(z,t) \in [0,1]$ *para c.t.* $(z,t) \in \Pi_T$ *y además,*

$$\phi \in \mathbf{L^1}(\Pi_T) \cap \mathbf{BV_t}(\Pi_T). \tag{3.3}$$

2. *Para todo* $\psi \in D(\Pi_T)$,

$$\iint_{\Pi_T} \Big(\phi \partial_t \psi + f(\phi, \boldsymbol{\gamma}(z), t)\Big) \partial_z \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t = 0. \tag{3.4}$$

3. *La siguiente desigualdad de entropía de Kružkov se satisface para cada* $\psi \in D(\Pi_T)$, $\psi \geq 0$*:*

$$\begin{aligned} &\iint_{\Pi_T} \Big(|\phi - c| \partial_t \psi + \operatorname{sgn}(\phi - c)\big(f(\phi, \boldsymbol{\gamma}(z), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)\big) \partial_z \psi\Big) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \\ &\quad - \iint_{\Pi_T \setminus \mathcal{J}} \operatorname{sgn}(\phi - c) f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z \psi \mathrm{d}z \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^T \sum_{m \in \mathcal{J}} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(m^+), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(m^-), t)| \psi(m, t) \mathrm{d}t \geq 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}; \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. *La condición inicial se satisface en el siguiente sentido* $\mathbf{L^1}$*:*

$$\operatorname*{esslim}_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |\phi(z,t) - \phi_0(z)| \mathrm{d}z = 0. \tag{3.6}$$

Haremos uso de un esquema tipo (1.22) extendido para el caso leyes de conservación con flujo discontinuo.

## 3.1. Método de volúmenes finitos

Discretizamos el dominio espacial $\mathbb{R}$ en celdas $I_j := [z_{j-1/2}, z_{j+1/2})$, $j \in \mathbb{Z}$, donde $z_j = j\Delta z$ son las interfaces de celda y $z_{j+1/2} = z_j + \Delta z/2$ los centros de celda. Similarmente, el intervalo temporal $(0,T)$ es discretizado como $t^n = n\Delta t$, para $n = 0, \ldots, M$, donde $M = \lfloor T/\Delta t \rfloor + 1$, lo cual conduce a las bandas temporales $I^n := [t^n, t^{n+1})$, $n = 0, \ldots, M-1$. Tomamos un tamaño de paso espacial, $\Delta z$ y un tamaño de paso temporal, $\Delta t$, sujetos a la siguiente condición CFL:

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



$$\lambda\Big( \text{máx}\{q_{\text{E}}, q_{\text{U}}\} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty \Big) \leq \frac{1}{2}, \tag{3.7}$$

donde $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta z}$ y,

$$\|v\|_\infty := \max_{0\leq\phi\leq 1} |v(\phi)|.$$

El dato inicial $\{\phi_j^0\}$ para el esquema de diferencias se discretiza mediante,

$$\phi_j^0 := \frac{1}{\Delta z}\int_{z_{j-1/2}}^{z_{j+1/2}} \phi_0(z)dz, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Calculamos $\{\phi_j^n\}$ mediante el siguiente esquema de diferencias explícito,

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \lambda(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n), \tag{3.9}$$

para $j \in \mathbb{Z}$ y $n = 0, 1, \ldots, M$. Aquí, el flujo numérico es definido por,

$$F_{j+1/2}^n := \overline{F}(\phi_{j+1}^n, \phi_j^n, \boldsymbol{\gamma}_{j+1/2}) = \begin{cases} -q_{\text{E}}(\phi_{j+1}^n - \phi_{\text{F}}^n) & \text{para } j < I_{\text{H}}, \\ -q_{\text{E}}(\phi_{j+1}^n - \phi_{\text{F}}^n) + \phi_j^n v(\phi_{j+1}^n) & \text{para } I_{\text{H}} < j < I_0, \\ q_{\text{U}}(\phi_j^n - \phi_{\text{F}}^n) + \phi_j^n v(\phi_{j+1}^n) & \text{para } I_0 < j < I_B, \\ q_{\text{U}}(\phi_j^n - \phi_{\text{F}}^n) & \text{para } j > I_B. \end{cases} \tag{3.10}$$

donde $I_{\text{H}}, I_0$ e $I_{\text{B}}$ son las celdas que contienen a las discontinuidades $-H, 0$ y $B$, respectivamente y $\overline{F}$ está dado por,

$$\overline{F}(u, w, \boldsymbol{\gamma}(z)) := \gamma_1(z)(u - \phi_{\text{F}}) + \gamma_2(z)(w - \phi_{\text{F}}) + \gamma_3(z)wv(u), \tag{3.11}$$

con,

$$\gamma_1(z) := \begin{cases} -q_{\text{E}} & \text{para } z < 0, \\ 0 & \text{para } z > 0, \end{cases} \quad \gamma_2(z) := \begin{cases} 0 & \text{para } z < 0, \\ q_{\text{U}} & \text{para } z > 0, \end{cases}$$

$$\gamma_3(z) := \begin{cases} 1 & \text{para } z \in (-H, B), \\ 0 & \text{para } z \notin (-H, B). \end{cases}$$

La solución en diferencias $\{\phi_j^n\}$ se extiende a todo $\Pi_T$ definiendo,

$$\phi^\Delta(z, t) = \phi_j^n, \quad (z, t) \in I_j \times [t^n, t^{n+1}), \tag{3.12}$$

donde $\Delta = \Delta t = \lambda \Delta z$. Además, discretizamos $\boldsymbol{\gamma}(z)$ por,

$$\boldsymbol{\gamma}_{j+1/2} := \frac{1}{\Delta z}\int_{z_j}^{z_{j+1}} \boldsymbol{\gamma}(z)dz, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.13}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Note que el flujo $\overline{F}$ es consistente con el flujo real en el sentido de que $\overline{F}(\phi, \phi, \boldsymbol{\gamma}) = f(\phi, \boldsymbol{\gamma})$. Más aún, $\overline{F}$ es Lipschitz en el sentido de que,

$$\begin{aligned} |\overline{F}(u_1, w, \gamma) - \overline{F}(u_2, w, \gamma)| &\leq L_1 |u_1 - u_2| \\ |\overline{F}(u, w_1, \gamma) - \overline{F}(u, w_2, \gamma)| &\leq L_2 |w_1 - w_2|, \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $L_1 = 2\,\text{máx}\{q_{\text{E}}, \|v\|_\infty\}$ y $L_2 = 2\,\text{máx}\{q_{\text{U}}, \|v'\|_\infty\}$.

## 3.2. Convergencia del esquema numérico

En esta sección, mostraremos que el esquema numérico (3.9)-(3.10) es convergente.

### 3.2.1. Principio del máximo

**Lema 3.1.** *Bajo la condición CFL* (3.7)*, el esquema* (3.9)-(3.10) *es monótono y satisface el principio del máximo, esto es, si* $0 \leq \phi^\Delta(z, 0) \leq 1$*, para todo* $z \in \mathbb{R}$ *y si* $0 \leq \phi_{\text{F}}(t) \leq 1$*, para todo* $0 < t < T$*, entonces* $0 \leq \phi^\Delta(z, t) \leq 1$*, para todo* $(z, t) \in \Pi_T$*.*

*Demostración.* Realizamos la prueba por inducción. Asumamos que $0 \leq \phi_j^n \leq 1$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Tenemos varios casos:
**Caso 1.** Si $j < I_{\text{H}}$, se sigue que,

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} &= \phi_j^n - \lambda[-q_{\text{E}}(\phi_{j+1}^n - \phi_{\text{F}}^n) + q_{\text{E}}(\phi_j^n - \phi_{\text{F}}^n)] \\ &= \phi_j^n - \lambda(-q_{\text{E}}\phi_{j+1}^n + q_{\text{E}}\phi_j^n) \\ &= (1 - \lambda q_{\text{E}})\phi_j^n + (\lambda q_{\text{E}})\phi_{j+1}^n. \end{aligned}$$

**Caso 2.** Para $j = I_{\text{H}}$, tenemos,

$$\begin{aligned} \phi_{I_{\text{H}}}^{n+1} &= \phi_{I_{\text{H}}}^n - \lambda[-q_{\text{E}}(\phi_{I_{\text{H}}+1}^n - \phi_{\text{F}}^n) + \phi_{I_{\text{H}}}^n v(\phi_{I_{\text{H}}}^n) + q_{\text{E}}(\phi_{I_{\text{H}}}^n - \phi_{\text{F}}^n)] \\ &= \phi_{I_{\text{H}}}^n - \lambda[-q_{\text{E}}\phi_{I_{\text{H}}+1}^n + \phi_{I_{\text{H}}}^n v(\phi_{I_{\text{H}}}^n) + q_{\text{E}}\phi_{I_{\text{H}}}^n)] \\ &= (1 - \lambda v(\phi_{I_{\text{H}}+1}^n) - \lambda q_{\text{E}})\phi_{I_{\text{H}}}^n + (\lambda q_{\text{E}})\phi_{I_{\text{H}}+1}^n \\ &\leq (1 - \lambda v(\phi_{I_{\text{H}}+1}^n) - \lambda q_{\text{E}})\phi_{I_{\text{H}}}^n + \lambda[q_{\text{E}} + v(\phi_{I_{\text{H}}+1}^n)]\phi_{I_{\text{H}}+1}^n \end{aligned}$$

**Caso 3.** Si $I_{\text{H}} < j < I_0$, se tiene que,

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} &= \phi_j^n - \lambda[-q_{\text{E}}(\phi_{j+1}^n - \phi_{\text{F}}^n) + \phi_j^n v(\phi_{j+1}^n) + q_{\text{E}}(\phi_j^n - \phi_{\text{F}}^n) - \phi_{j-1}^n v(\phi_j^n)] \\ &= \phi_j^n - \lambda[-q_{\text{E}}\phi_{j+1}^n + \phi_j^n v(\phi_{j+1}^n) + q_{\text{E}}\phi_j^n - \phi_{j-1}^n v(\phi_j^n)] \\ &= (1 - \lambda v(\phi_{j+1}^n) - \lambda q_{\text{E}})\phi_j^n + (\lambda q_{\text{E}})\phi_{j+1}^n + (\lambda v(\phi_j^n))\phi_{j-1}^n \\ &= [1 + \lambda\phi_j^n v'(\xi_j^{n+1/2}) - \lambda v(\phi_j^n)]\phi_j^n - \lambda\phi_j^n v'(\xi_j^{n+1/2})\phi_{j+1}^n + \lambda v(\phi_j^n)\phi_{j-1}^n \end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



**Caso 4.** Para $j = I_0$, vemos que,

$$\begin{aligned}\phi_{I_0}^{n+1} &= \phi_{I_0}^n - \lambda[q_{\mathrm{U}}(\phi_{I_0}^n - \phi_{\mathrm{F}}^n) + \phi_{I_0}^n v(\phi_{I_0+1}^n) + q_{\mathrm{E}}(\phi_{I_0}^n - \phi_{\mathrm{F}}^n) - \phi_{I_0-1}^n v(\phi_{I_0}^n)\\ &= \phi_{I_0}^n - \lambda[q_{\mathrm{U}}\phi_{I_0}^n + \phi_{I_0}^n v(\phi_{I_0+1}^n) + q_{\mathrm{E}}\phi_{I_0}^n - \phi_{I_0-1}^n v(\phi_{I_0}^n)] + \lambda(q_{\mathrm{U}} + q_{\mathrm{E}})\phi_{\mathrm{F}}^n\\ &= [1 - \lambda q_{\mathrm{U}} - \lambda q_{\mathrm{E}} - \lambda v(\phi_{I_0+1}^n)]\phi_{I_0}^n + (\lambda v(\phi_{I_0}^n))\phi_{I_0-1}^n + \lambda(q_{\mathrm{U}} + q_{\mathrm{E}})\phi_{\mathrm{F}}^n\\ &= [1 - \lambda q_{\mathrm{U}} - \lambda q_{\mathrm{E}} + \lambda\phi_{I_0}^n v'(\xi_{I_0}^{n+1/2}) - \lambda v(\phi_{I_0}^n)]\phi_{I_0}^n - \lambda\phi_{I_0}^n v'(\xi_{I_0}^{n+1/2})\phi_{I_0+1}^n\\ &\quad + \lambda v(\phi_{I_0}^n)\phi_{I_0-1}^n + \lambda(q_{\mathrm{U}} + q_{\mathrm{E}})\phi_{\mathrm{F}}^n\end{aligned}$$

**Caso 5.** Si $I_0 < j < I_{\mathrm{B}}$, vemos que,

$$\begin{aligned}\phi_j^{n+1} &= \phi_j^n - \lambda[q_{\mathrm{U}}(\phi_j^n - \phi_{\mathrm{F}}^n) + \phi_j^n v(\phi_{j+1}^n) - q_{\mathrm{U}}(\phi_j^n - \phi_{\mathrm{F}}^n) - \phi_{j-1}^n v(\phi_j^n)]\\ &= \phi_j^n - \lambda[q_{\mathrm{U}}\phi_j^n + \phi_j^n v(\phi_{j+1}^n) - q_{\mathrm{U}}\phi_{j-1}^n - \phi_{j-1}^n v(\phi_j^n)]\\ &= (1 - \lambda q_{\mathrm{U}} - \lambda v(\phi_{j+1}^n))\phi_j^n + \lambda(q_{\mathrm{U}} + v(\phi_j^n))\phi_{j-1}^n\\ &= [1 - \lambda q_{\mathrm{U}} + \lambda\phi_j^n v'(\xi_j^{n+1/2}) - \lambda v(\phi_j^n)]\phi_j^n - \lambda\phi_j^n v'(\xi_j^{n+1/2})\phi_{j+1}^n\\ &\quad + \lambda[q_{\mathrm{U}} + v(\phi_j^n)]\phi_{j-1}^n\end{aligned}$$

**Caso 6.** Para $j = I_{\mathrm{B}}$, tenemos que,

$$\begin{aligned}\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n+1} &= \phi_{I_{\mathrm{B}}}^n - \lambda[q_{\mathrm{U}}(\phi_{I_{\mathrm{B}}}^n - \phi_{\mathrm{F}}^n) - q_{\mathrm{U}}(\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^n - \phi_{\mathrm{F}}^n) - \phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^n v(\phi_{I_{\mathrm{B}}}^n)]\\ &= (1 - \lambda q_{\mathrm{U}})\phi_{I_{\mathrm{B}}}^n + \lambda(q_{\mathrm{U}} + v(\phi_{I_{\mathrm{B}}}^n))\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^n.\end{aligned}$$

**Caso 7.** Si $j > I_{\mathrm{B}}$, obtenemos que,

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \lambda[q_{\mathrm{U}}(\phi_j^n - \phi_{\mathrm{F}}^n) - q_{\mathrm{U}}(\phi_{j-1}^n - \phi_{\mathrm{F}}^n)] = (1 - \lambda q_{\mathrm{U}})\phi_j^n + (\lambda q_{\mathrm{U}})\phi_{j-1}^n.$$

Vemos que, a excepción del **Caso 6**, en todos los casos, escribimos $\phi_j^{n+1}$ como combinación convexa de $\phi_j^n, \phi_{j+1}^n, \phi_{j-1}^n$ y $\phi_{\mathrm{F}}^n$, en consecuencia tendríamos que $0 \le \phi_j^{n+1} \le 1$, para cada $j \in \mathbb{Z} \setminus \{I_{\mathrm{B}}\}$.

Para $j = I_{\mathrm{B}}$ considere la función,

$$h(\phi) = (1 - \lambda q_{\mathrm{U}})\phi + \lambda(q_{\mathrm{U}} + v(\phi)).$$

Por la condición (3.7) vemos que, $h'(\phi) = 1 - \lambda q_{\mathrm{U}} + \lambda v'(\phi) \ge 0$. En consecuencia, $0 \le h(\phi) \le h(1) = 1$, para todo $\phi$. En particular, $0 \le \phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n+1} \le 1$. De todo lo anterior vemos que $0 \le \phi_j^{n+1} \le 1$, para cada $j \in \mathbb{Z}$, con lo cual se concluye la demostración. □

### 3.2.2. Cota $\mathbf{L^1}$ temporal

**Lema 3.2.** *Si se satisface la condición CFL* (3.7)*, entonces,*

$$\Delta z \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\phi_j^1 - \phi_j^0| \le C_1 \Delta t, \tag{3.15}$$

*donde* $C_1 = 2(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty)\mathrm{TV}(\phi_0) + (q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}})|\phi_{\mathrm{F}}^0|$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



*Demostración.* Se presentan los siguientes casos:
**Caso 1.** Para $j < I_{\mathrm{H}}$ tenemos que,

$$\phi_j^1 - \phi_j^0 = \lambda q_{\mathrm{E}}(\phi_{j+1}^0 - \phi_j^0).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j<I_{\mathrm{H}}} |\phi_j^1 - \phi_j^0| \leq 2\lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}i} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty) \sum_{j<I_{\mathrm{H}}} |\phi_{j+1}^0 - \phi_j^0| \tag{3.16}$$

**Caso 2.** Si $j = I_{\mathrm{H}}$, entonces,

$$\begin{aligned}\phi_{I_{\mathrm{H}}}^1 - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^0 &= -\lambda v(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^0)\phi_{I_{\mathrm{H}}}^0 - \lambda q_{\mathrm{E}}\phi_{I_{\mathrm{H}}}^0 + \lambda q_{\mathrm{E}}\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^0 \\ &\leq \lambda[q_{\mathrm{E}} + v(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^0)](\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^0 - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^0).\end{aligned}$$

Así,

$$|\phi_{I_{\mathrm{H}}}^1 - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^0| \leq 2\lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty)|\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^0 - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^0| \tag{3.17}$$

**Caso 3.** Para $I_{\mathrm{H}} < j < I_0$, tenemos que,

$$\phi_j^1 - \phi_j^0 = \lambda q_{\mathrm{E}}(\phi_{j+1}^0 - \phi_j^0) - \lambda v(\phi_j^0)(\phi_j^0 - \phi_{j-1}^0) - \lambda v'(\xi_{j+1/2}^0)\phi_j^0(\phi_{j+1}^0 - \phi_j^0).$$

De ese modo,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in(I_{\mathrm{H}},I_0)} |\phi_j^1 - \phi_j^0| \leq 2\lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty) &\sum_{j\in(I_{\mathrm{H}},I_0)} |\phi_{j+1}^0 - \phi_j^0| \\ &- \lambda\|v\|_\infty|\phi_{I_0}^0 - \phi_{I_0-1}^0|\end{aligned} \tag{3.18}$$

**Caso 4.** Si $j = I_0$, entonces,

$$\begin{aligned}\phi_{I_0}^1 - \phi_{I_0}^0 &\leq \lambda[q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} - v'(\xi_{I_0+1/2}^0)\phi_{I_0}^0](\phi_{I_0+1}^0 - \phi_{I_0}^0) - \lambda v(\phi_{I_0}^0)(\phi_{I_0}^0 - \phi_{I_0-1}^0) \\ &\quad + \lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}})\phi_{\mathrm{F}}^0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\phi_{I_0}^1 - \phi_{I_0}^0| \leq{}& \lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty)|\phi_{I_0+1}^0 - \phi_{I_0}^0| + \lambda\|v\|_\infty|\phi_{I_0}^0 - \phi_{I_0-1}^0| \\ &+ \lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}})|\phi_{\mathrm{F}}^0|\end{aligned} \tag{3.19}$$

**Caso 5.** Para $I_0 < j < I_{\mathrm{B}}$, tenemos que,

$$\phi_j^1 - \phi_j^0 = -\lambda q_{\mathrm{U}}(\phi_j^0 - \phi_{j-1}^0) - \lambda v(\phi_j^0)(\phi_j^0 - \phi_{j-1}^0) - \lambda v'(\xi_{j+1/2}^0)\phi_j^0(\phi_{j+1}^0 - \phi_j^0).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in(I_0,I_{\mathrm{B}})} |\phi_j^1 - \phi_j^0| \leq 2\lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty) &\sum_{j\in(I_0,I_{\mathrm{B}})} |\phi_{j+1}^0 - \phi_j^0| \\ &+ \lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty)|\phi_{I_0}^0 - \phi_{I_0-1}^0| \\ &- \lambda(q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty)|\phi_{I_{\mathrm{B}}}^0 - \phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^0|.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



**Caso 6.** Si $j = I_{\mathrm{B}}$, se sigue que,

$$\phi^1_{I_{\mathrm{B}}} - \phi^0_{I_{\mathrm{B}}} \leq -\lambda q_{\mathrm{U}}(\phi^0_{I_{\mathrm{B}}} - \phi^0_{I_{\mathrm{B}}-1}) - \lambda v(\phi^0_{I_{\mathrm{B}}})(\phi^0_{I_{\mathrm{B}}} - \phi^0_{I_{\mathrm{B}}-1}).$$

De esta forma,

$$|\phi^1_{I_{\mathrm{B}}} - \phi^0_{I_{\mathrm{B}}}| \leq \lambda(q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty)|\phi^0_{I_{\mathrm{B}}} - \phi^0_{I_{\mathrm{B}}-1}|. \tag{3.21}$$

**Caso 7.** Para $j > I_{\mathrm{B}}$, vemos que,

$$\phi^1_j - \phi^0_j = -\lambda q_{\mathrm{U}}(\phi^0_j - \phi^0_{j-1}).$$

Así,

$$\begin{aligned}\sum_{j>I_{\mathrm{B}}} |\phi^1_j - \phi^0_j| &= \lambda q_{\mathrm{U}} \sum_{j>I_{\mathrm{B}}} |\phi^0_j - \phi^0_{j-1}| \\ &\leq 2\lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty) \sum_{j\geq I_{\mathrm{B}}} |\phi^0_{j+1} - \phi^0_j|.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Sumando (3.16)-(3.22) obtenemos que,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\phi^1_j - \phi^0_j| &\leq 2\lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty) \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\phi^0_{j+1} - \phi^0_j| + \lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}})|\phi^0_{\mathrm{F}}| \\ &= 2\lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty)\mathrm{TV}(\phi_0) + \lambda(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}})|\phi^0_{\mathrm{F}}|\end{aligned} \tag{3.23}$$

Vemos así que existe $C_1 = 2(q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty)\mathrm{TV}(\phi_0) + (q_{\mathrm{E}} + q_{\mathrm{U}})|\phi^0_{\mathrm{F}}|$, independiente de $\Delta$ y $n$ tal que,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\phi^1_{i,j} - \phi^0_{i,j}| \leq \lambda C_1.$$

□

**Lema 3.3.** *Si se satisface la condición CLF* (3.7)*, entonces,*

$$\Delta z \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\phi^{n+1}_j - \phi^n_j| \leq C\Delta t, \tag{3.24}$$

*donde* $C = C_1 + (q_{\mathrm{U}} + q_{\mathrm{E}})\,\mathrm{TV}(\phi_{\mathrm{F}})$*, con* $C_1$ *como en el Lema 3.2.*

*Demostración.* Similarmente a la demostración anterior, se dan varios casos:
**Caso 1.** Para $j < I_{\mathrm{H}}$, tenemos,

$$\begin{aligned}\phi^{n+1}_j - \phi^n_j &= (1 - \lambda q_{\mathrm{E}})\phi^n_j + (\lambda q_{\mathrm{E}})\phi^n_{j+1} - (1 - \lambda q_{\mathrm{E}})\phi^{n-1}_j - (\lambda q_{\mathrm{E}})\phi^{n-1}_{j+1} \\ &= (1 - \lambda q_{\mathrm{E}})(\phi^n_j - \phi^{n-1}_j) + (\lambda q_{\mathrm{E}})(\phi^n_{j+1} - \phi^{n-1}_{j+1}).\end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j<I_{\mathrm{H}}} |\phi_j^{n+1} - \phi_j^n| &\leq (1 - \lambda q_{\mathrm{E}}) \sum_{j<I_{\mathrm{H}}} |\phi_j^n - \phi_j^{n-1}| + \lambda q_{\mathrm{E}} \sum_{j<I_{\mathrm{H}}} |\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n-1}| \\ &= \sum_{j<I_{\mathrm{H}}} |\phi_j^n - \phi_j^{n-1}| + \lambda q_{\mathrm{E}} |\phi_{I_{\mathrm{H}}}^n - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^{n-1}|,\end{aligned}$$

esto es,

$$\sum_{j<I_{\mathrm{H}}} |\phi_j^{n+1} - \phi_j^n| \leq \sum_{j<I_{\mathrm{H}}} |\phi_j^n - \phi_j^{n-1}| + \lambda q_{\mathrm{E}} |\phi_{I_{\mathrm{H}}}^n - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^{n-1}|. \tag{3.25}$$

**Caso 2.** Si $j = I_{\mathrm{H}}$, se sigue que,

$$\begin{aligned}\phi_{I_{\mathrm{H}}}^{n+1} - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^n &= [1 - \lambda v(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^n) - \lambda q_{\mathrm{E}}]\phi_{I_{\mathrm{H}}}^n + (\lambda q_{\mathrm{E}})\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^n - [1 - \lambda v(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1}) \\ &\quad - \lambda q_{\mathrm{E}}]\phi_{I_{\mathrm{H}}}^{n-1} - (\lambda q_{\mathrm{E}})\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1} \\ &= [1 - \lambda v(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^n) - \lambda q_{\mathrm{E}}](\phi_{I_{\mathrm{H}}}^n - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^{n-1}) + \lambda q_{\mathrm{E}}(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^n - \phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1}) \\ &\quad + \lambda[v(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1}) - v(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^n)]\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1} \\ &= [1 - \lambda v(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1}) - \lambda q_{\mathrm{E}}](\phi_{I_{\mathrm{H}}}^n - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^{n-1}) \\ &\quad + \lambda[q_{\mathrm{E}} - v'(\xi_{I_{\mathrm{H}+1}}^{n-1/2})\phi_{I_{\mathrm{H}}}^n](\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^n - \phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1}).\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}|\phi_{I_{\mathrm{H}}}^{n+1} - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^n| \leq [1 - \lambda v(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1}) - \lambda q_{\mathrm{E}}]|\phi_{I_{\mathrm{H}}}^n - \phi_{I_{\mathrm{H}}}^{n-1}| \\ + \lambda[q_{\mathrm{E}} - v'(\xi_{I_{\mathrm{H}+1}}^{n-1/2})\phi_{I_{\mathrm{H}}}^n]|\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^n - \phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1}|\end{aligned} \tag{3.26}$$

**Caso 3.** Para $I_{\mathrm{H}} < j < I_0$,

$$\begin{aligned}\phi_j^{n+1} - \phi_j^n &= [1 - \lambda v(\phi_{j+1}^n) - \lambda q_{\mathrm{E}}]\phi_j^n + (\lambda q_{\mathrm{E}})\phi_{j+1}^n + (\lambda v(\phi_j^n))\phi_{j-1}^n \\ &\quad - [1 - \lambda v(\phi_{j+1}^{n-1}) - \lambda q_{\mathrm{E}}]\phi_j^{n-1} - (\lambda q_{\mathrm{E}})\phi_{j+1}^{n-1} - (\lambda v(\phi_j^{n-1}))\phi_{j-1}^{n-1} \\ &= [1 - \lambda v(\phi_{j+1}^n) - \lambda q_{\mathrm{E}}](\phi_j^n - \phi_j^{n-1}) + \lambda q_{\mathrm{E}}(\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n-1}) \\ &\quad + \lambda[v(\phi_{j+1}^{n-1}) - v(\phi_{j+1}^n)]\phi_j^{n-1} + \lambda[v(\phi_j^n) - v(\phi_j^{n-1})]\phi_{j-1}^n \\ &\quad + \lambda v(\phi_j^{n-1})(\phi_{j-1}^n - \phi_{j-1}^{n-1}) \\ &= [1 - \lambda v(\phi_{j+1}^{n-1}) + \lambda v'(\xi_j^{n-1/2})\phi_{j-1}^n - \lambda q_{\mathrm{E}}](\phi_j^n - \phi_j^{n-1}) \\ &\quad + \lambda[q_{\mathrm{E}} - v'(\xi_{j+1}^{n-1/2})\phi_j^{n-1}](\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n-1}) + \lambda v(\phi_j^{n-1})(\phi_{j-1}^n - \phi_{j-1}^{n-1})\end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in(I_{\mathrm{H}},I_0)}|\phi_j^{n+1}-\phi_j^n| \le \sum_{j\in(I_{\mathrm{H}},I_0)}&|\phi_j^n-\phi_j^{n-1}|+\lambda[v'(\xi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1/2})\phi_{I_{\mathrm{H}}}^n-q_{\mathrm{E}}]|\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^n-\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1}|\\ &+\lambda v(\phi_{I_{\mathrm{H}}+1}^{n-1})|\phi_{I_{\mathrm{H}}}^n-\phi_{I_{\mathrm{H}}}^{n-1}|-\lambda v(\phi_{I_0}^{n-1})|\phi_{I_0-1}^n-\phi_{I_0-1}^{n-1}|\\ &+\lambda[q_{\mathrm{E}}-v'(\xi_{I_0}^{n-1/2})\phi_{I_0-1}^n]|\phi_{I_0}^n-\phi_{I_0}^{n-1}|\end{aligned} \tag{3.27}$$

**Caso 4.** Si $j=I_0$, entonces,

$$\begin{aligned}\phi_{I_0}^{n+1}-\phi_{I_0}^n &= (1-\lambda q_{\mathrm{U}}-\lambda q_{\mathrm{E}}-\lambda v(\phi_{I_0+1}^n))\phi_{I_0}^n+(\lambda v(\phi_{I_0}^n))\phi_{I_0-1}^n+\lambda(q_{\mathrm{U}}+q_{\mathrm{E}})\phi_{\mathrm{F}}^n\\ &\quad-(1-\lambda q_{\mathrm{U}}-\lambda q_{\mathrm{E}}-\lambda v(\phi_{I_0+1}^{n-1}))\phi_{I_0}^{n-1}-(\lambda v(\phi_{I_0}^{n-1}))\phi_{I_0-1}^{n-1}-\lambda(q_{\mathrm{U}}+q_{\mathrm{E}})\phi_{\mathrm{F}}^{n-1}\\ &=[1-\lambda q_{\mathrm{U}}-\lambda q_{\mathrm{E}}-\lambda v(\phi_{I_0+1}^n)+\lambda v'(\xi_{I_0}^{n-1/2})\phi_{I_0-1}^n](\phi_{I_0}^n-\phi_{I_0}^{n-1})\\ &\quad-\lambda v'(\xi_{I_0+1}^{n-1/2})\phi_{I_0}^{n-1}(\phi_{I_0+1}^n-\phi_{I_0+1}^{n-1})+\lambda v(\phi_{I_0}^{n-1})(\phi_{I_0-1}^n-\phi_{I_0-1}^{n-1})\\ &\quad+\lambda(q_{\mathrm{U}}+q_{\mathrm{E}})(\phi_{\mathrm{F}}^n-\phi_{\mathrm{F}}^{n-1})\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|\phi_{I_0}^{n+1}-\phi_{I_0}^n| \le [1-\lambda q_{\mathrm{U}}-\lambda q_{\mathrm{E}}-\lambda v(\phi_{I_0+1}^n)+\lambda v'(\xi_{I_0}^{n-1/2})\phi_{I_0-1}^n]|\phi_{I_0}^n-\phi_{I_0}^{n-1}|\\ -\lambda v'(\xi_{I_0+1}^{n-1/2})\phi_{I_0}^{n-1}|\phi_{I_0+1}^n-\phi_{I_0+1}^{n-1}|+\lambda v(\phi_{I_0}^{n-1})|\phi_{I_0-1}^n-\phi_{I_0-1}^{n-1}|\\ +\lambda(q_{\mathrm{U}}+q_{\mathrm{E}})|\phi_{\mathrm{F}}^n-\phi_{\mathrm{F}}^{n-1}|\end{aligned} \tag{3.28}$$

**Caso 5.** Para $I_0<j<I_{\mathrm{B}}$, vemos que,

$$\begin{aligned}\phi_j^{n+1}-\phi_j^n &= [1-\lambda q_{\mathrm{U}}-\lambda v(\phi_{j+1}^n)]\phi_j^n+\lambda[q_{\mathrm{U}}+v(\phi_j^n)]\phi_{j-1}^n\\ &\quad-[1-\lambda q_{\mathrm{U}}-\lambda v(\phi_{j+1}^{n-1})]\phi_j^{n-1}-\lambda[q_{\mathrm{U}}+v(\phi_j^{n-1})]\phi_{j-1}^{n-1}\\ &=[1-\lambda q_{\mathrm{U}}-\lambda v(\phi_{j+1}^n)+\lambda v'(\xi_j^{n-1/2})\phi_{j-1}^{n-1}](\phi_j^n-\phi_j^{n-1})\\ &\quad+\lambda[q_{\mathrm{U}}+v(\phi_j^n)](\phi_{j-1}^n-\phi_{j-1}^{n-1})-v'(\xi_{j+1}^{n-1/2})\phi_j^{n-1}(\phi_{j+1}^n-\phi_{j+1}^{n-1}).\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in(I_0,I_{\mathrm{B}})}|\phi_j^{n+1}-\phi_j^n| \le \sum_{j\in(I_0,I_{\mathrm{B}})}&|\phi_j^n-\phi_j^{n-1}|+\lambda v'(\xi_{I_0+1}^{n-1/2})\phi_{I_0}^{n-1}|\phi_{I_0+1}^n-\phi_{I_0+1}^{n-1}|\\ &+\lambda[q_{\mathrm{U}}+v(\phi_{I_0+1}^n)]|\phi_{I_0}^n-\phi_{I_0}^{n-1}|\\ &-\lambda[q_{\mathrm{U}}+v(\phi_{I_{\mathrm{B}}}^n)]|\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^n-\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^{n-1}|\\ &-\lambda v'(\xi_{I_{\mathrm{B}}}^{n-1/2})\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^{n-1}|\phi_{I_{\mathrm{B}}}^n-\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n-1}|.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



**Caso 6.** Si $j = I_{\mathrm{B}}$, entonces,

$$\begin{aligned}\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n+1} - \phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n} &= (1 - \lambda q_{\mathrm{U}})\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n} + \lambda[q_{\mathrm{U}} + v(\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n})]\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^{n} - (1 - \lambda q_{\mathrm{U}})\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n-1} \\ &\quad - \lambda[q_{\mathrm{U}} + v(\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n-1})\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^{n-1}] \\ &= (1 - \lambda q_{\mathrm{U}} + \lambda v'(\xi_{I_{\mathrm{B}}}^{n-1/2})\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^{n-1})(\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n} - \phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n-1}) \\ &\quad + \lambda[q_{\mathrm{U}} + v(\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n})](\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^{n} - \phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^{n-1}).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n+1} - \phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n}| \leq (1 - \lambda q_{\mathrm{U}} + \lambda v'(\xi_{I_{\mathrm{B}}}^{n-1/2})\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^{n-1})|\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n} - \phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n-1}| \\ + \lambda[q_{\mathrm{U}} + v(\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n})]|\phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^{n} - \phi_{I_{\mathrm{B}}-1}^{n-1}|.\end{aligned} \tag{3.30}$$

**Caso 7.** Para $j > I_{\mathrm{B}}$, observamos que,

$$\phi_{j}^{n+1} - \phi_{j}^{n} = (1 - \lambda q_{\mathrm{U}})(\phi_{j}^{n} - \phi_{j}^{n-1}) + \lambda q_{\mathrm{U}}(\phi_{j-1}^{n} - \phi_{j-1}^{n-1}).$$

De ese modo,

$$\sum_{j>I_{\mathrm{B}}} |\phi_{j}^{n+1} - \phi_{j}^{n}| \leq \sum_{j>I_{\mathrm{B}}} |\phi_{j}^{n} - \phi_{j}^{n-1}| + \lambda q_{\mathrm{U}}|\phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n} - \phi_{I_{\mathrm{B}}}^{n-1}|. \tag{3.31}$$

Finalmente, sumando (3.25)-(3.31) obtenemos,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\phi_{j}^{n+1} - \phi_{j}^{n}| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\phi_{j}^{n} - \phi_{j}^{n-1}| + \lambda(q_{\mathrm{U}} + q_{\mathrm{E}})|\phi_{\mathrm{F}}^{n} - \phi_{\mathrm{F}}^{n-1}|. \tag{3.32}$$

En consecuencia, haciendo uso de la estimación anterior y del Lema 3.2, se sigue que,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\phi_{j}^{n+1} - \phi_{j}^{n}| &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\phi_{j}^{1} - \phi_{j}^{0}| + \lambda(q_{\mathrm{U}} + q_{\mathrm{E}}) \sum_{k=1}^{n} |\phi_{\mathrm{F}}^{k} - \phi_{\mathrm{F}}^{k-1}| \\ &\leq C_1\lambda + (q_{\mathrm{U}} + q_{\mathrm{E}})\,\mathrm{TV}(\phi_F)\lambda = C\lambda,\end{aligned}$$

con $C := C_1 + (q_{\mathrm{U}} + q_{\mathrm{E}})\,\mathrm{TV}(\phi_{\mathrm{F}})$. De lo anterior se deduce que existe $C$, independiente de $\Delta$ y $n$ tal que,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\phi_{j}^{n+1} - \phi_{j}^{n}| \leq C\lambda.$$

Multiplicando por $\Delta z$ en la anterior desigualdad obtenemos la cota deseada. □

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



### 3.2.3. Cota de variación espacial

Sea $V_a^b(z)$ la variación total de la función $x \mapsto z(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$.

**Lema 3.4.** *Para cada intervalo $[a,b]$ tal que $\mathcal{J} \cap [a,b] = \emptyset$, y cada $t \in [0,T]$ tenemos una cota de variación espacial de la forma $V_a^b(\phi^\Delta(\cdot,t)) \leq C(a,b)$, donde $C(a,b)$ es independiente de $\Delta$ y $t$ para $t \in [0,T]$.*

*Demostración.* En virtud de (3.24), sabemos que existe una constante $K$ tal que,

$$\Delta z \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_j^{n+1} - \phi_j^n| \leq K, \tag{3.33}$$

Como $\mathcal{J} \cap [a,b] = \emptyset$, podemos asumir que $-H < a < b < 0$. Fije $r > 0$ tal que, $2r < \text{mín}\{|a+H|, |b|\}$, y sin pérdida de generalidad asuma que $r > \Delta z$, para todos los tamaños de malla $\Delta z$ de interés. Sean,

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}(\Delta) := \{j | x_j \in [a - r - \Delta z, a]\}, \quad \mathcal{B} := \mathcal{B}(\Delta) := \{j | x_j \in [b, b + r + \Delta z]\}.$$

Note que, si $j \in \mathcal{A}$, entonces $a - r - \Delta z \leq x_j \leq a$, esto es, $(a-r)/\Delta z - 1 \leq j \leq a/\Delta z$. Por lo tanto, existe una biyección entre $\mathcal{A}$ y $[(a-r)/\Delta z - 1, a/\Delta z] \cap \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\Delta z|\mathcal{A}| \geq r$. Análogamente, $\Delta z|\mathcal{B}| \geq r$. Es claro entonces de (3.33) que,

$$\Delta z \sum_{j\in\mathcal{A}} \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_j^{n+1} - \phi_j^n| \leq K, \quad \Delta z \sum_{j\in\mathcal{B}} \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_j^{n+1} - \phi_j^n| \leq K. \tag{3.34}$$

Podemos elegir $j_a = j_a(\Delta)$, $j_b = j_b(\Delta)$ con $j_a \in \mathcal{A}$, $j_b + 1 \in \mathcal{B}$ tal que,

$$\sum_{n=0}^{M-1} |\phi_{j_a}^{n+1} - \phi_{j_a}^n| = \min_{j\in\mathcal{A}} \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_j^{n+1} - \phi_j^n|, \quad \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_{j_b+1}^{n+1} - \phi_{j_b+1}^n| = \min_{j\in\mathcal{B}} \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_j^{n+1} - \phi_j^n|.$$

Se sigue de (3.34) que,

$$\sum_{n=0}^{M-1} |\phi_{j_a}^{n+1} - \phi_{j_a}^n| \leq \frac{K}{|\mathcal{A}|\Delta z} \leq \frac{K}{r}, \quad \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_{j_b+1}^{n+1} - \phi_{j_b+1}^n| \leq \frac{K}{|\mathcal{B}|\Delta z} \leq \frac{K}{r}. \tag{3.35}$$

Debido a la forma en la que elegimos $j_a$ y $j_b$, para $j_a \leq j \leq j_b$ podemos escribir el esquema como,

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \lambda \Delta_- F_{j+1/2}^n. \tag{3.36}$$

La fórmula (3.36) puede ser escrita en forma incremental,

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + C_{j+1/2}^n \Delta_+ \phi_j^n - D_{j-1/2}^n \Delta_- \phi_j^n, \tag{3.37}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



donde,

$$C^n_{j+1/2} = \begin{cases} \lambda q_{\mathrm{E}} & \text{para } j < I_{\mathrm{H}}, \\ \lambda q_{\mathrm{E}} - \lambda \phi^n_j v'(\xi^n_{j+1/2}) & \text{para } I_{\mathrm{H}} < j < I_0, \\ -\lambda \phi^n_j v'(\xi^n_{j+1/2}) & \text{para } I_0 < j < I_B, \\ 0 & \text{para } j > I_B, \end{cases}$$

y,

$$D^n_{j-1/2} = \begin{cases} 0 & \text{para } j < I_{\mathrm{H}}, \\ \lambda v(\phi^n_j) & \text{para } I_{\mathrm{H}} < j < I_0, \\ \lambda q_{\mathrm{U}} + \lambda v(\phi^n_j) & \text{para } I_0 < j < I_B, \\ \lambda q_{\mathrm{U}} & \text{para } j > I_B. \end{cases}$$

Debido a la condición (3.7), es fácil ver que,

$$C^n_{j+1/2} \geq 0, \quad D^n_{j+1/2} \geq 0, \quad C^n_{j+1/2} + D^n_{j+1/2} \leq 1. \tag{3.38}$$

La forma incremental (3.38) implica que las diferencias evolucionan de acuerdo a,

$$\Delta_+ \phi^{n+1}_j = \Delta_+ \phi^n_j + C^n_{j+3/2} \Delta_+ \phi^n_{j+1} - C^n_{j+1/2} \Delta_+ \phi^n_j - D^n_{j+1/2} \Delta_+ \phi^n_j + D^n_{j-1/2} \Delta_- \phi^n_j. \tag{3.39}$$

Note que cuando $j = j_a$, podemos escribir (3.39) como,

$$\Delta_+ \phi^{n+1}_{j_a} = \Delta_+ \phi^n_{j_a} + C^n_{j_a+3/2} \Delta_+ \phi^n_{j_a+1} - D^n_{j_a+1/2} \Delta_+ \phi^n_{j_a} - (\phi^{n+1}_{j_a} - \phi^n_{j_a}). \tag{3.40}$$

Similarmente, cuando $j = j_b$, (3.39) toma la forma,

$$\Delta_+ \phi^{n+1}_{j_b} = \Delta_+ \phi^n_{j_b} - C^n_{j_b+1/2} \Delta_+ \phi^n_{j_b} + D^n_{j_b-1/2} \Delta_- \phi^n_{j_b} + (\phi^{n+1}_{j_b+1} - \phi^n_{j_b+1}). \tag{3.41}$$

Tomando valor absoluto, sumando sobre $j$ en (3.39) y lidiando con las contribuciones

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



de la frontera usando (3.40) y (3.41), obtenemos,

$$\begin{aligned}\sum_{j=j_a}^{j_b}|\Delta_+\phi_j^{n+1}| &\le (1-D^n_{j_a+1/2})|\Delta_+\phi^n_{j_a}| + C^n_{j_a+3/2}|\Delta_+\phi^n_{j_a+1}| + |\phi^{n+1}_{j_a}-\phi^n_{j_a}| \\ &\quad + \sum_{j=j_a+1}^{j_b-1}(1-C^n_{j+1/2}-D^n_{j+1/2})|\Delta_+\phi^n_j| + \sum_{j=j_a+1}^{j_b-1} C^n_{i,j+3/2}|\Delta_+\phi^n_{j+1}| \\ &\quad + \sum_{j=j_a+1}^{j_b-1} D^n_{j-1/2}|\Delta_-\phi^n_j| + (1-C_{j_b+1/2})|\Delta_+\phi^n_{j_b}| + D^n_{j_b-1/2}|\Delta_-\phi^n_{j_b}| \\ &\quad + |\phi^{n+1}_{j_a}-\phi^n_{j_a}| \\ &= |\Delta_+\phi^n_{j_a}| + |\phi^{n+1}_{j_a}-\phi^n_{j_a}| + \sum_{j=j_a+1}^{j_b-1}(1-C^n_{j+1/2}-D^n_{j+1/2})|\Delta_+\phi^n_j| \\ &\quad + \sum_{j=j_a+1}^{j_b-1}(C^n_{j+1/2}+D^n_{j+1/2})|\Delta_+\phi^n_j| + |\Delta_+\phi^n_{j_b}| + |\phi^{n+1}_{j_a}-\phi^n_{j_a}| \\ &\le \sum_{j=j_a}^{j_b}|\Delta_+\phi^n_j| + |\phi^{n+1}_{j_a}-\phi^n_{j_a}| + |\phi^{n+1}_{j_b+1}-\phi^n_{j_b+1}|.\end{aligned}$$

Procediendo por inducción y luego usando (3.34), encontramos que, para $0 \le n \le M-1$,

$$\sum_{j=j_a}^{j_b}|\Delta_+\phi^n_j| \le \sum_{j=j_a}^{j_b}|\Delta_+\phi^0_j| + \sum_{k=1}^{n}\left(|\phi^k_{j_a}-\phi^{k-1}_{j_a}| + |\phi^k_{j_b+1}-\phi^{k-1}_{j_b+1}|\right) \le \sum_{j=j_a}^{j_b}|\Delta_+\phi^0_j| + \frac{2K}{r}. \tag{3.42}$$

Note que, $[a,b] \subseteq [x_{j_a}, x_{j_b+1}]$ y $\phi_0$ tiene variación acotada. Por lo tanto, de (3.42) resulta,

$$V_a^b(\phi^\Delta(\cdot,t)) \le \mathrm{TV}(\phi_0) + \frac{2K}{r}.$$

□

### 3.2.4. Desigualdad discreta de entropía

**Lema 3.5.** *La solución aproximada $\phi^\Delta$ generada por el método* (3.9) *satisface la siguiente desigualdad discreta de entropía: para $j \in \mathbb{Z}$, para $n = 0, \dots, M-1$ y para cada $c \in \mathbb{R}$,*

$$|\phi^{n+1}_j - c| \le |\phi^n_j - c| - \lambda\Delta_- G^n_{j+1/2} + \lambda\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2}, t^n), \tag{3.43}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



*donde el flujo numérico de entropía es definido por,*

$$G^n_{j+1/2} = \overline{F}(\phi^n_{j+1} \vee c, \phi^n_j \vee c, \boldsymbol{\gamma}_{j+1/2}) - \overline{F}(\phi^n_{j+1} \wedge c, \phi^n_j \wedge c, \boldsymbol{\gamma}_{j+1/2}),$$

*y* $\overline{F}$ *se define en* (3.11).

*Demostración.* Defina, $H(a, b, c) := b - \lambda(\overline{F}(c, b, \boldsymbol{\gamma}) - \overline{F}(b, a, \boldsymbol{\gamma}))$. Por monotonía, $H$ es no decreciente con respecto a todas las variables. En adición,

$$H(a, a, a) = a - \lambda(\overline{F}(a, a, \boldsymbol{\gamma}) - \overline{F}(a, a, \boldsymbol{\gamma})) = a,$$

esto es, $H(a, a, a) = a$. Mas aún, sabemos que,

$$\phi^{n+1}_j = \phi^n_j - \lambda(\overline{F}(\phi^n_{j+1}, \phi^n_j, \boldsymbol{\gamma}_{j+1/2}) - \overline{F}(\phi^n_j, \phi^n_{j-1}, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2})). \tag{3.44}$$

Por lo tanto $\phi^{n+1}_j = H(\phi^n_{j-1}, \phi^n_j, \phi^n_{j+1})$.

Fije $c \in \mathbb{R}$ y denotemos por $\mathcal{S}(\phi^n; j)$ el lado derecho de (3.44). Defina, $C^{n+1}_j = \mathcal{S}(c; j)$. Por monotonicidad tenemos,

$$\phi^{n+1}_j = H(\phi^n_{j-1}, \phi^n_j, \phi^n_{j+1}) \leq H(\phi^n_{j-1} \vee c, \phi^n_j \vee c, \phi^n_{j+1} \vee c). \tag{3.45}$$

Note que $k = H(k, k, k)$. En consecuencia,

$$k \leq H(\phi^n_{j-1} \vee k, \phi^n_j \vee k, \phi^n_{j+1} \vee k). \tag{3.46}$$

De (3.45) y (3.46), obtenemos,

$$\phi^{n+1}_j \vee C^{n+1}_j \leq H(\phi^n_{j-1} \vee c, \phi^n_j \vee c, \phi^n_{j+1} \vee c). \tag{3.47}$$

Análogamente, se sigue que,

$$\phi^{n+1}_j \wedge C^{n+1}_j \geq H(\phi^n_{j-1} \wedge c, \phi^n_j \wedge c, \phi^n_{j+1} \wedge c). \tag{3.48}$$

Restando (3.48) de (3.47) resulta,

$$\phi^{n+1}_j \vee C^{n+1}_j - \phi^{n+1}_j \wedge C^{n+1}_j \leq H(\phi^n_{j-1} \vee c, \phi^n_j \vee c, \phi^n_{j+1} \vee c) - H(\phi^n_{j-1} \wedge c, \phi^n_j \wedge c, \phi^n_{j+1} \wedge c). \tag{3.49}$$

Es claro que,

$$\phi^{n+1}_j \vee C^{n+1}_j - \phi^{n+1}_j \wedge C^{n+1}_j = |\phi^{n+1}_j - C^{n+1}_j|.$$

Mas aún,

$$\begin{aligned} H(\phi^n_{j-1} \vee c, \phi^n_j \vee c, \phi^n_{j+1} \vee c) &= \phi^n_j \vee c - \lambda(\overline{F}(\phi^n_{j+1} \vee c, \phi^n_j \vee c, \boldsymbol{\gamma}_{j+1/2}) \\ &\quad - \overline{F}(\phi^n_j \vee c, \phi^n_{j-1} \vee c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2})); \\ H(\phi^n_{j-1} \wedge c, \phi^n_j \wedge c, \phi^n_{j+1} \wedge c) &= \phi^n_j \wedge c - \lambda(\overline{F}(\phi^n_{j+1} \wedge c, \phi^n_j \wedge c, \boldsymbol{\gamma}_{j+1/2}) \\ &\quad - \overline{F}(\phi^n_j \wedge c, \phi^n_{j-1} \wedge c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2})). \end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Por lo tanto, si $W = H(\phi_{j-1}^n \vee c, \phi_j^n \vee c, \phi_{j+1}^n \vee c) - H(\phi_{j-1}^n \wedge c, \phi_j^n \wedge c, \phi_{j+1}^n \wedge c)$, entonces,

$$W = \phi_j^n \vee c - \phi_j^n \wedge c - \lambda(G_{j+1/2}^n - G_{j-1/2}^n) = |\phi_j^n - c| - \lambda \Delta_- G_{j+1/2}^n. \tag{3.50}$$

En consecuencia, de (3.49) y (3.50) obtenemos,

$$|\phi_j^{n+1} - C_j^{n+1}| \leq |\phi_j^n - c| - \lambda \Delta_- G_{j+1/2}^n, \tag{3.51}$$

Finalmente, de (3.44) y empleando $|a+b| \geq |a| + \operatorname{sgn}(a)b$, obtenemos,

$$\begin{aligned} |\phi_j^{n+1} - C_j^{n+1}| &= |\phi_j^{n+1} - c + \lambda \Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2}, t^n)| \\ &\geq |\phi_j^{n+1} - c| + \lambda \operatorname{sgn}(\phi_j^{n+1} - c) \Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2}, t^n). \end{aligned} \tag{3.52}$$

lo cual finaliza la demostración. □

### 3.2.5. Teorema principal

**Teorema 3.2.** *Sea $\phi^\Delta$ la solución aproximada generada por el método* (3.9)*. Asuma que $\Delta := (\Delta z, \Delta t) \to 0$ con el radio $\lambda$ fijo y satisfaciendo la condición CFL* (3.7)*. Entonces $\phi^\Delta \to \phi$ acotadamente c.t.p. en $\mathbf{L^1}(\Pi_T)$, donde $\phi$ es la única solución de entropía del problema de valor inicial* (3.1) *en el sentido de la Definición 3.1.*

*Demostración.* Observemos que el Lema 3.1 nos garantiza que nuestra sucesión de soluciones aproximadas $\phi^\Delta$ definida en (3.12), es acotada en $\mathbf{L}^\infty$. Además, el Lema 3.3 demuestra la $\mathbf{L^1}$-continuidad en tiempo de la sucesión $\phi^\Delta$, mientras que el Lema 3.4 nos garantiza una cota en la variación total espacial en cualquier intervalo $[a,b]$ tal que $[a,b] \cap \mathcal{J} = \emptyset$. Aplicando resultados estándares de compacidad se sigue que para cada intervalo $[a,b]$ tal que $[a,b] \cap \mathcal{J} = \emptyset$, existe una subsucesión, la cual denotaremos nuevamente por $\phi^\Delta$, que converge en $\mathbf{L^1}([0,T] \times [a,b])$. Tomemos pues una unión contable de intervalos $[a_i, b_i]$ tales que,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] = \mathbb{R} \setminus \mathcal{J}.$$

Empleando un proceso estándar de diagonalización, podemos extraer una subsucesión, que seguiremos denotando por $\phi^\Delta$, que converge en $\mathbf{L^1_{loc}}(\Pi_T)$ y en c.t.p en $\mathbf{L^1}(\Pi_T)$ a una función $\phi \in \mathbf{L}^\infty(\Pi_T)$. □

**Teorema 3.3.** *Sea $\phi$ una solución débil construída como el límite de aproximaciones $\phi^\Delta$, generadas por el esquema* (3.9)-(3.10) *y sea $c \in \mathbb{R}$. Sea $\psi \in \mathcal{D}((\mathbb{R} \setminus \mathcal{J}) \times [0,T))$ tal que, $\psi \geq 0$. Entonces se satisface la siguiente desigualdad de entropía,*

$$\begin{aligned} &\iint_{\Pi_T} \Big( |\phi - c| \partial_t \psi + \operatorname{sgn}(\phi - c) \big( f(\phi, \boldsymbol{\gamma}(z), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t) \big) \partial_z \psi \Big) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \\ &\quad - \iint_{\Pi_T \setminus \mathcal{J}} \operatorname{sgn}(\phi - c) f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \geq 0, \quad \forall \, c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



*Demostración.* Sea $\psi \in \mathcal{D}((\mathbb{R} \setminus \mathcal{J}) \times [0, T))$, con $\psi \geq 0$ dado. Defina $\psi_j^n := \psi(z_j, t^n)$ y multipliquemos por $\Delta z \psi_j^n$ la desigualdad (3.43). Luego, sumando por partes obtenemos que,

$$\begin{aligned} -\Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_j^{n+1} - c| \left( \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} \right) \\ - \Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} G_{j-1/2}^n \frac{\Delta_- \psi_j^n}{\Delta z} \\ \leq \Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \gamma_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Para $(z, t) \in R_j^n$ tenemos que,

$$\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} = \psi_t(z, t) + \mathcal{O}(\Delta z + \Delta t),$$

$$\begin{aligned} D_+ \psi_j^n &:= \frac{\Delta_+ \psi_j^n}{\Delta z} = \psi_z(z, t) + \mathcal{O}(\Delta z + \Delta t), \\ D_- \psi_j^n &:= \frac{\Delta_- \psi_j^n}{\Delta z} = \psi_z(z, t) + \mathcal{O}(\Delta z + \Delta t). \end{aligned}$$

De lo anterior y haciendo uso del Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (Véase Teorema 5.4 en Anexo 3), notamos que la primera suma en (3.54) satisface que,

$$\Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_j^{n+1} - c| \left( \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} \right) \longrightarrow \iint_{\Pi_T} |\phi - c| \partial_t \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t. \tag{3.55}$$

La segunda suma en (3.54) se reescribe como,

$$\begin{aligned} \Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} G_{j-1/2}^n \frac{\Delta_- \psi_j^n}{\Delta z} &= \Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} \left( \frac{1}{2} F_{j-1/2}^n D_- \psi_j^n + \frac{1}{2} F_{j+1/2}^n D_+ \psi_j^n \right) \\ &= \Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} \left( \frac{1}{2} g(\phi_{j-1}^n, z_{j-1}) D_- \psi_j^n + \frac{1}{2} g(\phi_j^n, z_j) D_+ \psi_j^n \right) \\ &\quad + \mathcal{E}_-^\Delta + \mathcal{E}_+^\Delta, \end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



donde,

$$\mathcal{E}_-^\Delta := \Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{2} \left( F_{j-1/2}^n - g(\phi_{j-1}^n, z_{j-1}) \right) D_- \psi_j^n,$$

$$\mathcal{E}_+^\Delta := \Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{2} \left( F_{j+1/2}^n - g(\phi_j^n, z_j) \right) D_+ \psi_j^n.$$

Nuestro objetivo es mostrar que, $\mathcal{E}_-^\Delta = \mathcal{E}_+^\Delta = \mathcal{O}(\Delta z)$. Note pues que,

$$F_{j-1/2}^n - g(\phi_{j-1}^n, z_{j-1}) = \overline{F}(\phi_{j-1}^n, \phi_j^n, \gamma_{j-1/2}) - \overline{F}(\phi_{j-1}^n, \phi_{j-1}^n, \gamma_{j-1/2}).$$

En consecuencia,

$$\mathcal{E}_-^\Delta = \frac{1}{2} \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[ \overline{F}(\phi_{j-1}^n, \phi_j^n, \gamma_{j-1/2}) - \overline{F}(\phi_{j-1}^n, \phi_{j-1}^n, \gamma_{j-1/2}) \right] \right\} D_- \psi_j^n$$

De (3.14) y usando la cota de la variación total espacial (3.42) obtenemos,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \overline{F}(\phi_{j-1}^n, \phi_j^n, \gamma_{j-1/2}) - \overline{F}(\phi_{j-1}^n, \phi_{j-1}^n, \gamma_{j-1/2}) \right| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} L_2 |\phi_j^n - \phi_{j-1}^n| \leq K'$$

De ese modo, $\mathcal{E}_-^\Delta = \mathcal{O}(\Delta z)$, un cálculo similar muestra que, $\mathcal{E}_+^\Delta = \mathcal{O}(\Delta z)$. Reuniendo las cotas anteriores resulta,

$$\Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} G_{j-1/2}^n \frac{\Delta_- \psi_j^n}{\Delta z} \to \iint_{\Pi_T} \Big( f(\phi, \boldsymbol{\gamma}(z), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t) \Big) \partial_z \psi \Big) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t. \quad (3.56)$$

Finalmente, observe que,

$$\begin{aligned}
&\Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \gamma_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n \\
&= \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{j<I_H} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \gamma_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{I_H<j<I_0} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \gamma_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n \\
&\quad + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{I_0<j<I_B} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \gamma_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{j>I_B} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \gamma_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n \\
&\quad + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \gamma_{I_H-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_{I_H}^n + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \gamma_{I_0-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_{I_0}^n \\
&\quad + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \gamma_{I_B-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_{I_B}^n.
\end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Note que el soporte de la función test $\psi$ no incluye las discontinuidades del flujo en los puntos $-H, 0$ y $B$. Por lo tanto, consideramos $\psi_{I_H} = \psi_{I_0} = \psi_{I_B} = 0$, de acuerdo a nuestra discretización. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \gamma_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n \\
&\longrightarrow \int_0^T \int_{-\infty}^{-H} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_{-H}^{0} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^T \int_0^B |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_B^{\infty} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \\
&\quad = \iint_{\Pi_T \setminus \mathcal{J}} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.4.** *Sea $\phi$ una solución débil construida como el límite de aproximaciones $\phi^\Delta$, generadas por el esquema* (3.9)-(3.10) *y sea $c \in \mathbb{R}$. Sea $\psi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$ tal que, $\psi \geq 0$. Entonces se satisface la siguiente desigualdad de entropía,*

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Pi_T} \Big( |\phi - c| \partial_t \psi + \operatorname{sgn}(\phi - c) \big( f(\phi, \boldsymbol{\gamma}(z), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t) \big) \partial_z \psi \Big) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \\
&\quad + \iint_{\Pi_T \setminus \mathcal{J}} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^T \sum_{m\in\mathcal{J}} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(m^+), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(m^-), t)| \psi(m, t) \, \mathrm{d}t \geq 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

*Demostración.* Sea $\psi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$, con $\psi \geq 0$ dado. Defina $\psi_j^n := \psi(z_j, t^n)$ y multipliquemos por $\Delta z \psi_j^n$ la desigualdad (3.43). Luego, sumando por partes obtenemos que,

$$\begin{aligned}
&-\Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_j^{n+1} - c| \left( \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} \right) \\
&\quad - \Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} G_{j-1/2}^n \frac{\Delta_- \psi_j^n}{\Delta z} \\
&\quad \leq \Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Procediendo como en la demostración del Teorema 3.3, vemos que si $\Delta := (\Delta z, \Delta t) \to 0$, entonces,

$$\Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} |\phi_j^{n+1} - c| \left( \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} \right) \longrightarrow \iint_{\Pi_T} |\phi - c| \partial_t \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t, \tag{3.59}$$

y,

$$\Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} G_{j-1/2}^n \frac{\Delta_- \psi_j^n}{\Delta z} \to \iint_{\Pi_T} \Big( f(\phi, \boldsymbol{\gamma}(z), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t) \Big) \partial_z \psi \Big) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t, \tag{3.60}$$

Finalmente, observe que,

$$\begin{aligned}
&\Delta z \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n \\
&= \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{j\le I_H} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{I_H \le j \le I_0} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n \\
&\quad + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{I_0 \le j \le I_B} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{j\ge I_B} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{j-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_j^n \\
&\quad + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{I_H-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_{I_H}^n + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{I_0-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_{I_0}^n \\
&\quad + \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{I_B-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_{I_B}^n \\
&:= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6 + \Sigma_7.
\end{aligned}$$

Procediendo como en la demostración del Teorema 3.3, vemos que,

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 \longrightarrow &\int_0^T \int_{-\infty}^{-H} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_{-H}^0 |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \\
&+ \int_0^T \int_0^B |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_B^\infty |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \\
&= \iint_{\Pi_T \setminus \mathcal{J}} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(z), t)_z| \psi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Resta analizar las sumas $\Sigma_5$, $\Sigma_6$ y $\Sigma_7$. En efecto, sea $m_1 = -H$. De acuerdo a nuestra discretización, tenemos que existe un único índice $I_H$ tal que,

$$z_{I_H-1/2} < m_1 \le z_{I_H+1/2},$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



de lo cual se sigue que,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\gamma}_{I_H+1/2} - \boldsymbol{\gamma}(m_1^+)| &\leq \|\boldsymbol{\gamma}'\|_{\mathbf{L}^\infty(m_1,\infty)}\Delta z \\ |\boldsymbol{\gamma}_{I_H-1/2} - \boldsymbol{\gamma}(m_1^-)| &\leq \|\boldsymbol{\gamma}'\|_{\mathbf{L}^\infty(-\infty,m_1)}\Delta z \end{aligned} \tag{3.61}$$

De ese modo, haciendo uso de (3.61) se tiene que,

$$\begin{aligned} \Sigma_5 &= \Delta z \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{\Delta_+ f(c, \boldsymbol{\gamma}_{I_H-1/2}, t^n)}{\Delta z} \right| \psi_{I_H}^n \\ &= \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(m_1^+), t^n) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(m_1^-), t^n)| \psi_{j_H}^n + \mathcal{O}(\Delta z). \end{aligned}$$

Haciendo uso del Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obtenemos que si $\Delta := (\Delta z, \Delta t) \to 0$, entonces,

$$\Sigma_5 \longrightarrow \int_0^T |f(c, \boldsymbol{\gamma}(m_1^+), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(m_1^-), t)| \psi(m_1, t)\, \mathrm{d}t. \tag{3.62}$$

Análogamente vemos que si $m_2 = 0$ y $m_3 = B$, entonces,

$$\Sigma_6 \longrightarrow \int_0^T |f(c, \boldsymbol{\gamma}(m_2^+), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(m_2^-), t)| \psi(m_2, t)\, \mathrm{d}t, \tag{3.63}$$

y,

$$\Sigma_7 \longrightarrow \int_0^T |f(c, \boldsymbol{\gamma}(m_3^+), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(m_3^-), t)| \psi(m_3, t)\, \mathrm{d}t. \tag{3.64}$$

Así, en virtud de (3.62),(3.63) y (3.64), concluimos que,

$$\Sigma_5 + \Sigma_6 + \Sigma_7 \longrightarrow \int_0^T \sum_{m \in \mathcal{J}} |f(c, \boldsymbol{\gamma}(m^+), t) - f(c, \boldsymbol{\gamma}(m^-), t)| \psi(m, t)\, \mathrm{d}t,$$

lo cual finaliza la demostración. □

## 3.3. Experimentos numéricos

**Ejemplo 3.5.** *Consideremos un clarificador-espesador que inicialmente está completamente lleno de agua, esto es, $\phi_0(z) = 0$, para cada $z \in \mathbb{R}$. En $t = 0$, empezamos a alimentar el clarificador-espesador con una tasa de alimentación constante de $\phi_{\mathrm{F}}(t) = 0.7$, para cada $t > 0$. Los caudales vienen dados por $q_{\mathrm{E}} = 1$ y $q_{\mathrm{U}} = 0.6$. Los resultados se muestran en la Figura 3.1. Se obtuvieron errores en norma $\mathbf{L}^\infty$, los cuales se resumen en la Tabla 3.1.*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



| $\Delta z$ | $\|e\|_\infty$ | $\log_2(\|e_1\|/\|e_2\|)$ |
|---|---|---|
| $1/100$ | $4.43e-02$ | - |
| $1/200$ | $2.76e-02$ | 0.682 |
| $1/400$ | $1.65e-03$ | 0.741 |
| $1/800$ | $9.40e-03$ | 0.814 |
| $1/1600$ | $4.90e-03$ | 0.939 |
| $1/3200$ | $2.14e-03$ | 1.195 |

Cuadro 3.1: Error numérico en norma $\mathbf{L}^\infty$ en $t = 1$.

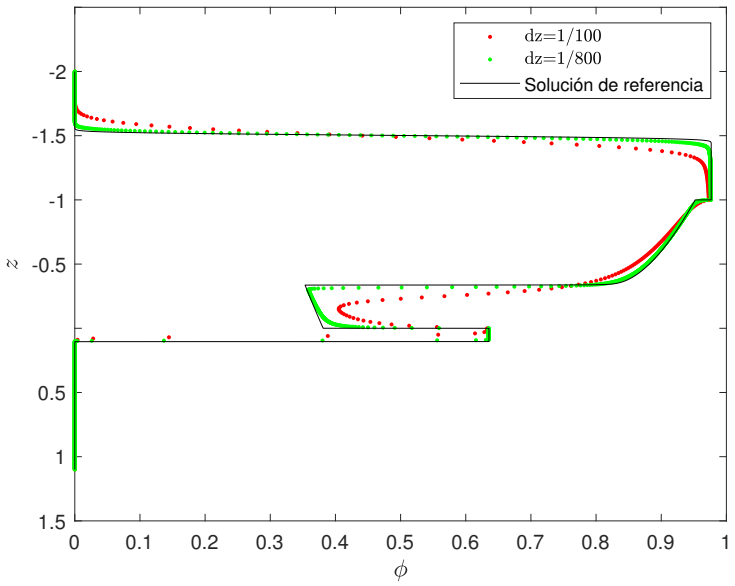



Figura 3.1: Comparación de las soluciones obtenidas empleando el esquema (3.9)-(3.10) con tamaños de paso $dz = 1/100$ y $dz = 1/800$, con una solución de referencia obtenida con el método de Engquist-Osher (5.4)-(5.5).

**Ejemplo 3.6.** *Un punto importante a considerar en el problema* (3.1) *es la existencia de estados estacionarios [25], es decir, soluciones del problema: hallar una función* $\phi$ *no nula, tal que,*

$$g_z(\phi, z) = 0, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

*Es posible encontrar estos equilibrios haciendo de uso de la condición de Rankine-Hugoniot asociada al problema. De momento, podemos determinar dos tipos de estados estacionarios los cuales dependen de los caudales* $Q_{\mathrm{E}}$, $Q_{\mathrm{U}}$ *y de la tasa de alimentación*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



$\phi_{\mathrm{F}}$. *Uno que ocurre cuando,*

$$0 \leq \phi_{\mathrm{F}} \leq \frac{Q_{\mathrm{U}}}{Q_{\mathrm{U}} + Q_{\mathrm{E}}},$$

*y otro que ocurre cuando,*

$$\frac{Q_{\mathrm{U}}}{Q_{\mathrm{U}} + Q_{\mathrm{E}}} \leq \phi_{\mathrm{F}} \leq 1.$$

*Sin embargo estos son estados estacionarios triviales. Como trabajo futuro, estamos interesados en la existencia de estados estacionarios no triviales, en particular, en una solución estacionaria en la zona de espesamiento* $[0, B]$. *Para ilustrar estas dos soluciones, consideramos un clarificador-espesador ocupando el intervalo de profundidad* $[-0.8, 3.2]$ *y hacemos uso del flujo de Vesilind dado por,*

$$f(\phi) = v_{St}\phi \left( \frac{\exp(-r_V\phi) - \exp(-r_V)}{1 - \exp(-r_V)} \right),$$

*con* $v_{St} = 6$ *y* $r_V = 2$. *En las Figuras 3.3 y 3.3 podemos apreciar estos estados estacionarios en un tiempo* $t = 30$.

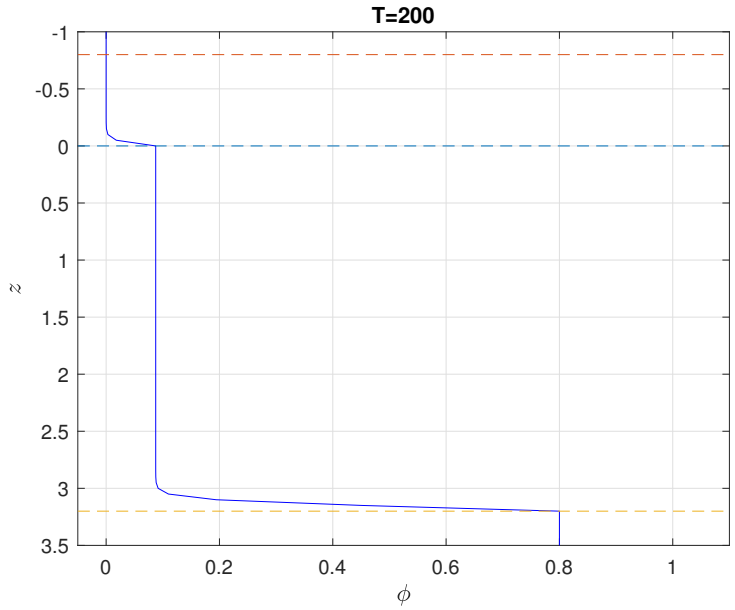



Figura 3.2: Estado estacionario para $Q_{\mathrm{U}} = 0.6$, $Q_{\mathrm{E}} = 1$ y $\phi_{\mathrm{F}} = 0.3$. Nótese que, $\phi_{\mathrm{F}} < \frac{Q_{\mathrm{U}}}{Q_{\mathrm{U}}+Q_{\mathrm{E}}} = 0.375$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



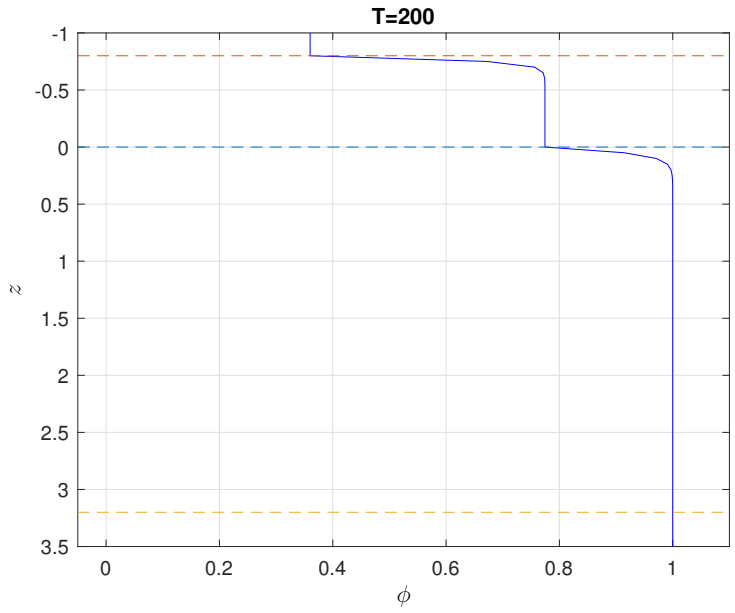



Figura 3.3: Estado estacionario para $Q_{\mathrm{U}} = 0.6$, $Q_{\mathrm{E}} = 1$ y $\phi_{\mathrm{F}} = 0.6$. Nótese que, $\phi_{\mathrm{F}} > \frac{Q_{\mathrm{U}}}{Q_{\mathrm{U}}+Q_{\mathrm{E}}} = 0.375$.

## 3.4. Unicidad

En el Capítulo 1 vimos que para garantizar la unicidad del problema base (1.3) bastaba imponer cierta condición de entropía de Kružkov. Sin embargo, de acuerdo a Mitrovic, Karlsen, Bürger, et al. [26, 27, 13], cuando tenemos discontinuidades en el flujo, esta condición es insuficiente para probar la $\mathbf{L^1}-$estabilidad de la solución débil del problema estudiado. Es por ello que es requerido estudiar conceptos adicionales como lo son la condición de cruce y la existencia de trazas.

Primero, precisamos lo que significa que los saltos presentes en $\boldsymbol{\gamma}$ satisfagan la condición de cruce.

**Definición 3.7** (Condición de cruce)**.** *Para cada salto en $\boldsymbol{\gamma}$ con límites a izquierda y derecha $(\boldsymbol{\gamma}_-, \boldsymbol{\gamma}_+)$ asociados, decimos que la condición de cruce se satisface, si para estados $u$ y $v$, se cumple que,*

$$f(u, \boldsymbol{\gamma}_+, t) - f(u, \boldsymbol{\gamma}_-, t) < 0 < f(v, \boldsymbol{\gamma}_+, t) - f(v, \boldsymbol{\gamma}_-, t) \Longrightarrow u < v. \tag{3.65}$$

Geométricamente la condición (3.65) impone que las gráficos de las funciones $f(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_+, \cdot)$ y $f(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_-, t)$ no se corten o que la gráfica de $f(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_-, t)$ quede por encima de la gráfica de $f(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_+, t)$, a la izquierda del punto de corte.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Por ejemplo, como podemos ver en la Figura 3.4, los flujos numéricos del Ejemplo 3.5 satisfacen esta condición.

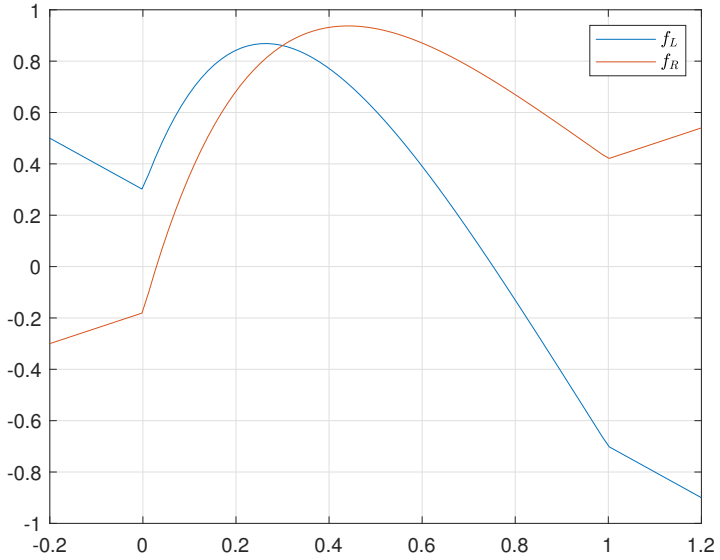



Figura 3.4: $f_L(\phi) = -(\phi - \phi_{\mathrm{F}}) + \phi V_{\mathrm{Ve}}(\phi)$, $f_R(\phi) = 0.6(\phi - \phi_{\mathrm{F}}) + \phi V_{\mathrm{Ve}}(\phi)$.

También, necesitamos el concepto de traza.

**Definición 3.8.** *Sea* $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *una función que pertenece a* $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ *y* $\partial_x W \in \mathcal{M}(\Pi_T)$. *Una traza a derecha de* $W(\cdot, t)$ *en el punto* $x = x_0$ *es una función* $t \to W(x_0+, t) \in \mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{loc}}(\mathbb{R}^+)$ *tal que para c.t.p.* $t \in \mathbb{R}^+$, *se tiene que:*

$$\operatorname*{esslim}_{x \uparrow x_0} |W(x, t) - W(x_0+, t)| = 0. \tag{3.66}$$

*Similarmente, entendemos por traza a izquierda de* $W(\cdot, t)$ *en el punto* $x = x_0$ *es una función* $t \to W(x_0-, t) \in \mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{loc}}(\mathbb{R}^+)$ *tal que para c.t.p.* $t \in \mathbb{R}^+$, *se tiene que:*

$$\operatorname*{esslim}_{x \downarrow x_0} |W(x, t) - W(x_0-, t)| = 0. \tag{3.67}$$

Cabe resaltar, que en trabajos anteriores se demostró que las condiciones (3.65), (3.66) y (3.67), garantizaban la $\mathbf{L}^{\mathbf{1}}-$estabilidad de la solución débil y por ende se tenía unicidad de solución. Por ejemplo, Bürger et al. en [2], hicieron uso de un flujo numérico tipo Engquist-Osher para aproximar las soluciones del problema (3.1). Esto les permitió definir una función auxiliar conocida como *singular mapping*, con la cual demostraron que las trazas (3.66) y (3.67) existen.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



Cabe resaltar que para nuestro flujo numérico esta estrategia no es aplicable y que, a priori, no tendríamos garantía de la existencia de estos límites. Sin embargo, basándonos en los comentarios de Mitrovic [26], los trabajos de Panov en [28] mostraron que las trazas existen en prácticamente todas las situaciones relevantes. Así, podemos asumir la existencia de trazas y de ese modo obtener el siguiente resultado de unicidad.

**Teorema 3.9.** *[2] Asuma que $u$ y $v$ son soluciones de entropía tipo $\mathbf{BV_t}$ en el sentido de la Definición 3.1 del problema de valor inicial* (3.1) *con condiciones iniciales $u_0$ y $v_0$, respectivamente. Entonces, para c.t.p. $t \in (0,T)$,*

$$\int_{\mathbb{R}} |u(z,t) - v(z,t)|dz \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(z) - v_0(z)|dz.$$

## 3.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo estudiamos la convergencia de un esquema numérico de volúmenes finitos para el caso $N = 1$, es decir, cuando tenemos solo un clarificador-espesador. Para ello, se incluyó el término fuente como una discontinuidad en el flujo y definimos una desigualdad de entropía la cual es un caso particular de la Definición (2.2).

Demostramos que la sucesión generada por el esquema numérico $\{\phi^{\Delta}\}$ satisface propiedades de acotamiento y de variación total en tiempo y en espacio. Luego, se propuso una desigualdad discreta de entropía y finalmente mostramos convergencia de esta sucesión a la desigualdad de entropía (3.5).

Se presentaron algunas simulaciones numéricas en las que se hizo uso de una solución de referencia proporcionada por el Método de Engquist-Osher (Véase Anexo 2), el cual sabemos que converge a la única solución de entropía de este modelo ([2], 2004).

Nos centramos ahora en extender este método numérico para el caso de varias unidades, esto es, $N > 1$, lo cual se estudiará en el capitulo subsecuente.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Capítulo 4

# Existencia de solución del problema principal

En este capítulo estudiamos la existencia de solución del problema principal (2.1) mediante el uso de un esquema tipo (1.22) extendido para el caso leyes de conservación con flujo discontinuo.

## 4.1. Método de volúmenes finitos

Discretizamos el dominio espacial $\mathbb{R}$ en celdas $I_j := [z_{j-1/2}, z_{j+1/2})$, $j \in \mathbb{Z}$, donde $z_j = j\Delta z$ son las interfaces de celda y $z_{j+1/2} = z_j + \Delta z/2$ los centros de celda. Similarmente, el intervalo temporal $(0, T)$ es discretizado como $t^n = n\Delta t$, para $n = 0, \ldots, M$, donde $M = \lfloor T/\Delta t \rfloor + 1$, lo cual conduce a las bandas temporales $I^n := [t^n, t^{n+1})$, $n = 0, \ldots, M-1$. Tomamos un tamaño de paso espacial, $\Delta z$ y un tamaño de paso temporal, $\Delta t$, sujetos a la siguiente condición CFL:

$$\lambda\Big(\max_{1\le i\le N}\{q_{\mathrm{E}i}, q_{\mathrm{U}i}\} + \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty\Big) \le \frac{1}{2}, \tag{4.1}$$

donde $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta z}$ y,

$$\|v\|_\infty := \max_{0\le\phi\le 1} |v(\phi)|.$$

El dato inicial $\{\phi^0_{i,j}\}$ para el esquema de diferencias se discretiza mediante,

$$\phi^0_{i,j} := \frac{1}{\Delta z}\int_{z_{j-1/2}}^{z_{j+1/2}} \phi^0_i(z)dz, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Calculamos $\{\phi^n_{i,j}\}$ mediante el siguiente esquema de diferencias explícito,

$$\phi^{n+1}_{i,j} = \phi^n_{i,j} - \lambda(F^n_{i,j+1/2} - F^n_{i,j-1/2}) + \lambda \mathcal{S}^n_j, \tag{4.3}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



para $j \in \mathbb{Z}$ y $n = 0, 1, \ldots, M$. Aquí, el flujo numérico es definido por,

$$F^n_{i,j+1/2} := \widehat{F}_i(\phi^n_{i,j+1}, \phi^n_{i,j}, \boldsymbol{\gamma}_{i,j+1/2}) = \begin{cases} -q_{\mathrm{E}i}\phi^n_{i,j+1} & \text{para } j < I_{\mathrm{H}}, \\ -q_{\mathrm{E}i}\phi^n_{i,j+1} + \phi^n_{i,j} v(\phi^n_{i,j+1}) & \text{para } I_{\mathrm{H}} < j < I_0, \\ q_{\mathrm{U}i}\phi^n_{i,j} + \phi^n_{i,j} v(\phi^n_{i,j+1}) & \text{para } I_0 < j < I_B, \\ q_{\mathrm{U}i}\phi^n_{i,j} & \text{para } j > I_B. \end{cases} \tag{4.4}$$

donde $\widehat{F}_i$ está dado por,

$$\widehat{F}_i(u, w, \boldsymbol{\gamma}_i(z)) := \gamma^1_i(z)u + \gamma^2_i(z)w + \gamma^3_i(z)wv(u),$$

con,

$$\gamma^1_i(z) := \begin{cases} -q_{\mathrm{E}i} & \text{para } z < 0, \\ 0 & \text{para } z > 0, \end{cases} \quad \gamma^2_i(z) := \begin{cases} 0 & \text{para } z < 0, \\ q_{\mathrm{U}i} & \text{para } z > 0, \end{cases}$$

$$\gamma^3_i(z) := \begin{cases} 1 & \text{para } z \in (-H, B), \\ 0 & \text{para } z \notin (-H, B). \end{cases}$$

Además,

$$\mathcal{S}^n_{i,j} := \delta_j \mathcal{S}_i(\boldsymbol{\phi}^n_j, t^n, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2),$$

para cada $i = 1, \ldots, N$, donde,

$$\delta_j = \int_{z_{j-1/2}}^{z_{j+1/2}} \delta(z)dz \tag{4.5}$$

La solución en diferencias $\{\phi^n_{i,j}\}$ se extiende a todo $\Pi_T$ definiendo,

$$\phi^\Delta_i(z, t) = \phi^n_{i,j}, \quad (z, t) \in I_j \times [t^n, t^{n+1}), \tag{4.6}$$

donde $\Delta = \Delta t = \lambda \Delta z$. Además, discretizamos $\boldsymbol{\gamma}(z)$ por,

$$\boldsymbol{\gamma}_{i,j+1/2} := \frac{1}{\Delta z} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \boldsymbol{\gamma}_i(z)dz, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{4.7}$$

Note que el flujo $\widehat{F}_i$ es consistente con el flujo real en el sentido de que $\widehat{F}_i(\phi, \phi, \boldsymbol{\gamma}) = f_i(\phi, \boldsymbol{\gamma_i})$. Más aún, $\widehat{F}_i$ es Lipschitz en el sentido de que,

$$\begin{aligned} |\widehat{F}_i(u_1, w, \gamma_i) - \widehat{F}_i(u_2, w, \gamma)| &\le L_{1,i}|u_1 - u_2| \\ |\widehat{F}_i(u, w_1, \gamma_i) - \widehat{F}_i(u, w_2, \gamma)| &\le L_{2,i}|w_1 - w_2|, \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $L_{1,i} = 2\,\mathrm{máx}\{q_{\mathrm{E}i}, \|v\|_\infty\}$ y $L_{2,i} = 2\,\mathrm{máx}\{q_{\mathrm{U}i}, \|v'\|_\infty\}$.

Teniendo en cuenta lo anterior y bajo ciertos supuestos, podemos garantizar que el término fuente es acotado. El resultado se resume en el siguiente lema.

**Lema 4.1.** *Si* $\phi_{\mathrm{F}}(t), \phi_{\mathrm{W}}(t), \phi_i(B^+, t), \phi_i((-H)^-, t) \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, N$ *y para todo* $t > 0$, *entonces* $S_i(\boldsymbol{\phi}, t, 0, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \in [0, 1]$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



## 4.2. Principio del máximo

En esta sección, mostraremos que el esquema numérico (4.3)-(4.4) satisface el principio del máximo. Para ello haremos uso del Lema 4.1.

**Lema 4.2.** *Bajo la condición CFL* (4.1)*, el esquema* (4.3)-(4.4) *es monótono y satisface el principio del máximo para* $i = 1, \ldots, N$*, esto es,*

*Si* $0 \leq \phi_i^{\Delta}(z,0) \leq 1$*, para todo* $z \in \mathbb{R}$*, entonces* $0 \leq \phi_i^{\Delta}(z,t) \leq 1$*, para todo* $(z,t) \in \Pi_T$.

*Demostración.* Realizamos la prueba por inducción. Fijemos $i = 1, \ldots, N$ y asumamos que $0 \leq \phi_{i,j}^n \leq 1$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Tenemos varios casos:
**Caso 1.** Si $j < I_{\mathrm{H}}$, se sigue que,

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - \lambda(-q_{\mathrm{E}i}\phi_{i,j+1}^n + q_{\mathrm{E}i}\phi_{i,j}^n) = (1 - \lambda q_{\mathrm{E}i})\phi_{i,j}^n + (\lambda q_{\mathrm{E}i})\phi_{i,j+1}^n.$$

**Caso 2.** Para $j = I_{\mathrm{H}}$, tenemos,

$$\begin{aligned}
\phi_{i,I_{\mathrm{H}}}^{n+1} &= \phi_{i,I_{\mathrm{H}}}^n - \lambda[-q_{\mathrm{E}i}\phi_{i,I_{\mathrm{H}}+1}^n + \phi_{i,I_{\mathrm{H}}}^n v(\phi_{i,I_{\mathrm{H}}}^n) - (-q_{\mathrm{E}i}\phi_{i,I_{\mathrm{H}}}^n)] \\
&= (1 - \lambda v(\phi_{i,I_{\mathrm{H}}+1}^n) - \lambda q_{\mathrm{E}i})\phi_{i,I_{\mathrm{H}}}^n + (\lambda q_{\mathrm{E}i})\phi_{i,I_{\mathrm{H}}+1}^n \\
&\leq (1 - \lambda v(\phi_{i,I_{\mathrm{H}}+1}^n) - \lambda q_{\mathrm{E}i})\phi_{i,I_{\mathrm{H}}}^n + \lambda[q_{\mathrm{E}i} + v(\phi_{i,I_{\mathrm{H}}+1}^n)]\phi_{i,I_{\mathrm{H}}+1}^n
\end{aligned}$$

**Caso 3.** Si $I_{\mathrm{H}} < j < I_0$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\phi_{i,j}^{n+1} &= \phi_{i,j}^n - \lambda[-q_{\mathrm{E}i}\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j}^n v(\phi_{i,j+1}^n) + q_{\mathrm{E}i}\phi_{i,j}^n - \phi_{i,j-1}^n v(\phi_{i,j}^n)] \\
&= (1 - \lambda v(\phi_{i,j+1}^n) - \lambda q_{\mathrm{E}i})\phi_{i,j}^n + (\lambda q_{\mathrm{E}i})\phi_{i,j+1}^n + (\lambda v(\phi_{i,j}^n))\phi_{i,j-1}^n \\
&= [1 + \lambda\phi_{i,j}^n v'(\xi_{i,j}^{n+1/2}) - \lambda v(\phi_{i,j}^n)]\phi_{i,j}^n - \lambda\phi_{i,j}^n v'(\xi_{i,j}^{n+1/2})\phi_{i,j+1}^n + \lambda v(\phi_{i,j}^n)\phi_{i,j-1}^n
\end{aligned}$$

**Caso 4.** Para $j = I_0$, vemos que,

$$\begin{aligned}
\phi_{i,I_0}^{n+1} &= \phi_{i,I_0}^n - \lambda[q_{\mathrm{U}i}\phi_{i,I_0}^n + \phi_{i,I_0}^n v(\phi_{i,I_0+1}^n) + q_{\mathrm{E}i}\phi_{i,I_0}^n - \phi_{i,I_0-1}^n v(\phi_{i,I_0}^n)] + \lambda\mathcal{S}_{i,I_0}^n \\
&= [1 - \lambda q_{\mathrm{U}i} - \lambda q_{\mathrm{E}i} - \lambda v(\phi_{i,I_0+1}^n)]\phi_{i,I_0}^n + (\lambda v(\phi_{i,I_0}^n))\phi_{i,I_0-1}^n + \lambda\mathcal{S}_{i,I_0}^n \\
&= [1 - \lambda q_{\mathrm{U}i} - \lambda q_{\mathrm{E}i} + \lambda\phi_{i,I_0}^n v'(\xi_{i,I_0}^{n+1/2}) - \lambda v(\phi_{i,I_0}^n)]\phi_{i,I_0}^n - \lambda\phi_{i,I_0}^n v'(\xi_{i,I_0}^{n+1/2})\phi_{i,I_0+1}^n \\
&\quad + \lambda v(\phi_{i,I_0}^n)\phi_{i,I_0-1}^n + \lambda\mathcal{S}_{i,I_0}^n
\end{aligned}$$

**Caso 5.** Si $I_0 < j < I_{\mathrm{B}}$, vemos que,

$$\begin{aligned}
\phi_{i,j}^{n+1} &= \phi_{i,j}^n - \lambda[q_{\mathrm{U}i}\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j}^n v(\phi_{i,j+1}^n) - q_{\mathrm{U}i}\phi_{i,j-1}^n - \phi_{i,j-1}^n v(\phi_{i,j}^n)] \\
&= (1 - \lambda q_{\mathrm{U}i} - \lambda v(\phi_{i,j+1}^n))\phi_{i,j}^n + \lambda(q_{\mathrm{U}i} + v(\phi_{i,j}^n))\phi_{i,j-1}^n \\
&= [1 - \lambda q_{\mathrm{U}i} + \lambda\phi_{i,j}^n v'(\xi_{i,j}^{n+1/2}) - \lambda v(\phi_{i,j}^n)]\phi_{i,j}^n - \lambda\phi_{i,j}^n v'(\xi_{i,j}^{n+1/2})\phi_{i,j+1}^n \\
&\quad + \lambda[q_{\mathrm{U}i} + v(\phi_{i,j}^n)]\phi_{i,j-1}^n
\end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



**Caso 6.** Para $j = I_{\mathrm{B}}$, tenemos que,

$$\begin{aligned}\phi_{i,I_{\mathrm{B}}}^{n+1} &= \phi_{i,I_{\mathrm{B}}}^{n} - \lambda[q_{\mathrm{U}i}\phi_{i,I_{\mathrm{B}}}^{n} - q_{\mathrm{U}i}\phi_{i,I_{\mathrm{B}}-1}^{n} - \phi_{i,I_{\mathrm{B}}-1}^{n} v(\phi_{i,I_{\mathrm{B}}}^{n})] \\ &= (1 - \lambda q_{\mathrm{U}i})\phi_{i,I_{\mathrm{B}}}^{n} + \lambda(q_{\mathrm{U}i} + v(\phi_{i,I_{\mathrm{B}}}^{n}))\phi_{i,I_{\mathrm{B}}-1}^{n}.\end{aligned}$$

**Caso 7.** Si $j > I_{\mathrm{B}}$, obtenemos que,

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} - \lambda(q_{\mathrm{U}i}\phi_{i,j}^{n} - q_{\mathrm{U}i}\phi_{i,j-1}^{n}) = (1 - \lambda q_{\mathrm{U}i})\phi_{i,j}^{n} + (\lambda q_{\mathrm{U}i})\phi_{i,j-1}^{n}.$$

Vemos que, a excepción del **Caso 6**, en todos los casos, escribimos $\phi_{i,j}^{n+1}$ como combinación convexa de $\phi_{i,j}^{n}, \phi_{i,j+1}^{n}$ y $\phi_{i,j-1}^{n}$, en consecuencia tendríamos que $0 \leq \phi_{i,j}^{n+1} \leq 1$, para cada $j \in \mathbb{Z} \setminus \{I_{\mathrm{B}}\}$.

Para $j = I_{\mathrm{B}}$ considere la función,

$$h(\phi) = (1 - \lambda q_{\mathrm{U}i})\phi + \lambda(q_{\mathrm{U}i} + v(\phi)).$$

Por la condición (4.1) vemos que, $h'(\phi) = 1 - \lambda q_{\mathrm{U}i} + \lambda v'(\phi) \geq 0$. En consecuencia, $0 \leq h(\phi) \leq h(1) = 1$, para todo $\phi$. En particular, $0 \leq \phi_{i,I_{\mathrm{B}}}^{n+1} \leq 1$. De todo lo anterior vemos que $0 \leq \phi_{i,j}^{n+1} \leq 1$, para cada $j \in \mathbb{Z}$, con lo cual se concluye la demostración. □

## 4.3. Experimentos numéricos

**Ejemplo 4.1.** *En los experimentos numéricos subsecuentes consideramos cuatro* CTs *($N = 4$) ocupando el intervalo de profundidad* $[-0.8, 3.2]$ *y un flujo tipo Vesilind dado por,*

$$f(\phi) = v_{St}\phi\left(\frac{\exp(-r_V\phi) - \exp(-r_V)}{1 - \exp(-r_V)}\right),$$

*con* $v_{St} = 6.75$ *y* $r_V = 2$. *Tomamos también* $Q_{\mathrm{F}} = 0.6$, $Q_{\mathrm{W}} = 1$, $\phi_{\mathrm{F}} = 1$ *y* $\phi_{\mathrm{W}} = 0$.

*En la primera simulación, consideramos caudales de desbordamiento de control pequeños y en orden decreciente, por lo tanto, la sedimentación se produce de izquierda a derecha, como podemos apreciar en la Figura 4.1.*

*En la segunda simulación, consideramos caudales de desbordamiento de control grandes por lo tanto, se produce un estado "cortocircuito" y no hay sedimentación en el CCD, como podemos apreciar en la Figura 4.2.*

*En la tercera simulación, consideramos los mismos caudales de desbordamiento de control de la Simulación 2, pero cambiamos el caudal* $Q_{\mathrm{U}4}$ *por un valor más pequeño, esto genera que el cuarto equipo sedimente primero y de esa forma la sedimentación se produce de derecha a izquierda. Esto se puede ver en la Figura 4.3.*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



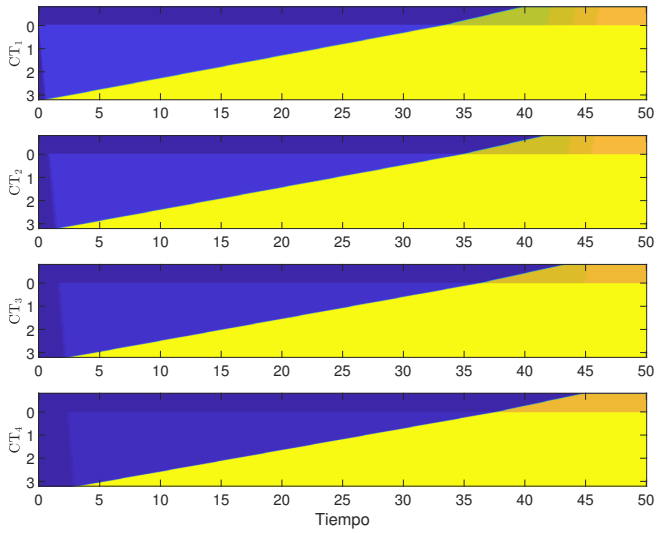



Figura 4.1: En este ejemplo consideramos $Q_{\mathrm{U1}} = 0.5$, $Q_{\mathrm{U2}} = 0.4$, $Q_{\mathrm{U3}} = 0.3$ y $Q_{\mathrm{U4}} = 0.2$.

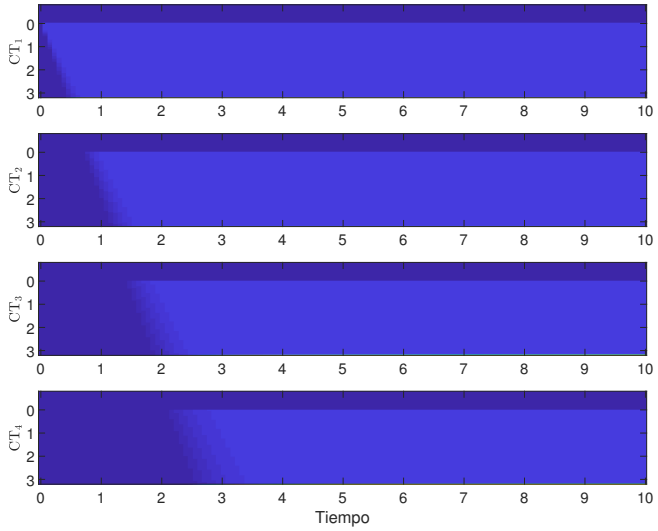



Figura 4.2: En este ejemplo consideramos $Q_{\mathrm{U1}} = 0.8$, $Q_{\mathrm{U2}} = 0.7$, $Q_{\mathrm{U3}} = 0.6$ y $Q_{\mathrm{U4}} = 0.6$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



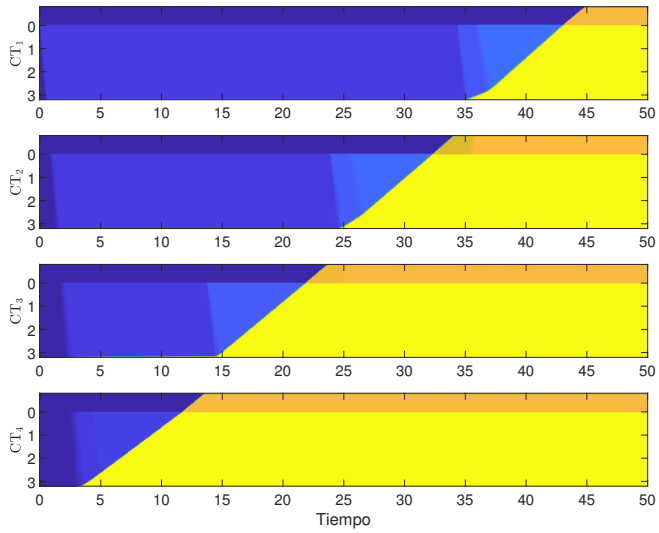



Figura 4.3: En este ejemplo consideramos $Q_{\mathrm{U1}} = 0.8$, $Q_{\mathrm{U2}} = 0.7$, $Q_{\mathrm{U3}} = 0.6$ y $Q_{\mathrm{U4}} = 0.2$.

Definamos,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q_{\mathbf{F}}} &:= (Q_{\mathrm{F1}}, Q_{\mathrm{F2}}, Q_{\mathrm{F3}}, Q_{\mathrm{F4}})\\ \boldsymbol{Q_{\mathbf{E}}} &:= (Q_{\mathrm{E1}}, Q_{\mathrm{E2}}, Q_{\mathrm{E3}}, Q_{\mathrm{E4}})\\ \boldsymbol{Q_{\mathbf{U}}} &:= (Q_{\mathrm{U1}}, Q_{\mathrm{U2}}, Q_{\mathrm{U3}}, Q_{\mathrm{U4}}).\end{aligned}$$

La siguiente tabla resume los resultados obtenidos en los experimentos numéricos anteriores.

| $\boldsymbol{Q_{\mathbf{U}}}$ | $\boldsymbol{Q_{\mathbf{E}}}$ | $\boldsymbol{Q_{\mathbf{F}}}$ |
|---|---|---|
| $(0.5, 0.4, 0.3, 0.2)$ | $(1.4, 1.3, 1.2, 1.1)$ | $(1.9, 1.7, 1.5, 1.3)$ |
| $(0.8, 0.7, 0.6, 0.6)$ | $(1, 1.2, 1.1, 1)$ | $(1.8, 1.9, 1.7, 1.6)$ |
| $(0.8, 0.7, 0.6, 0.2)$ | $(1.4, 1.6, 1.5, 1.5)$ | $(2.2, 2.3, 2.1, 1.6)$ |

Observamos que leves cambios en los valores de alimentación de cada CTs generan dinámicas distintas en el CCD. Esto induce a pensar que existen valores óptimos de $Q_{\mathrm{U}i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, que permiten que los tanques que conforman la red se llenen de la mejor forma. Lo anterior da pie al estudio de problemas de optimización relacionados con la elección de estos parámetros libres.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



## 4.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo presentamos la descripción de un esquema de volúmenes finitos para aproximar las soluciones del sistema de leyes de conservación que describe el circuito CCD. Se introdujo una condición CFL bajo la cual se demuestra que la sucesión de aproximaciones generada por el método numérico satisface el principio del máximo. Esto constituye una primera aproximación en la demostración del esquema numérico planteado.

Cabe resaltar que las estimaciones de variación total en tiempo han presentado dificultades en su demostración debido a que los retardos que acoplan la transferencia entre unidades tienen contribuciones que no son trivialmente controladas.

Del mismo modo, se realizaron algunas simulaciones numéricas que reflejan de buena forma el retardo presente en la transferencia entre equipos.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis se estudió el modelamiento y análisis numérico de un circuito a contracorriente compuesto por $N$ clarificadores-espesadores. Este estudio se realizó por etapas las cuales están consignadas en cada uno de los capítulos de este documento.

Inicialmente, se estudió la existencia y unicidad de un problema base con flujo continuo bajo ciertos supuestos. Empleamos un esquema numérico que hace uso de que el flujo se puede descomponer como el producto de la velocidad por la concentración lo cual presenta ventajas con respecto a los esquemas numéricos tradicionales. De igual manera hicimos uso de discretizaciones tipo MUSCL para extender este esquema a un esquema de segundo orden.

Del mismo modo, describimos los caudales presentes en un sistema CCD. Impusimos condiciones sobre estos que derivaron en un resultado de conservación global y en la obtención de una región de positividad que garantiza que los caudales de efluente $Q_{\mathrm{E}i}$ son no negativos, siempre que los caudales de control de desbordamiento $Q_{\mathrm{U}i}$ sean no negativos. Para modelar la dinámica de cada CTs, empleamos leyes de conservación con flujo discontinuo en espacio y con término fuente el cual describe el acoplamiento de equipos. Se describió la trasferencia entre unidades haciendo énfasis en que es posible realizarla de dos formas, lo cual da origen a dos modelos matemáticos para describir el CCD, a saber: incorporar estas cantidades como retardos en el modelo del circuito (Modelo 1) o resolver explícitamente ecuaciones de transporte para el transporte de la mezcla en los distintos tubos (Modelo 2). Se adoptó el enfoque del Modelo 1 y se propuso una definición de solución de entropía tipo $\mathbf{BV_t}$ la cual tiene en cuenta el acoplamiento de unidades.

Similarmente, se demostró la convergencia de un esquema numérico de volúmenes finitos para el caso $N = 1$, es decir, cuando tenemos solo un clarificador-espesador. Para esto, incluimos el término fuente como una discontinuidad en el flujo. Probamos que la sucesión generada por el esquema numérico $\{\phi^{\Delta}\}$ satisface el principio del máximo,

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



que tiene de variación total acotada en tiempo y que tiene variación total acotada en espacio en un intervalo $[a, b]$ que no contenga las discontinuidades del flujo. Con base en estas propiedades y usando una desigualdad discreta de entropía formulada, finalmente mostramos convergencia de esta sucesión a la solución de entropía (3.5). Realizamos experimentos numéricos en los que se compararon las soluciones obtenidas con una solución de referencia obtenida mediante el método de Engquist-Osher.

Finalmente, describimos un esquema de volúmenes finitos para aproximar las soluciones del sistema de leyes de conservación que describe el circuito CCD, es decir, para el caso $N > 1$. Se introdujo una condición CFL bajo la cual se demuestra que la sucesión de aproximaciones generada por el método numérico satisface el principio del máximo. Del mismo modo, se realizaron algunas simulaciones numéricas que reflejan de buena forma el retardo presente en la transferencia entre equipos.

Como trabajo futuro consideramos lo siguiente:

1. Extender el esquema numérico (1.21)-(1.22) a un esquema de alto orden de aproximación empleando aproximaciones tipo WENO y a un esquema en 2D.

2. Estudiar el Modelo 2 de transferencia de unidades descrito en el Capítulo 2, el cual consiste en resolver explícitamente ecuaciones de transporte para el transporte de la mezcla en los distintos tubos.

3. Demostrar la unicidad de solución del sistema (2.15).

4. Probar el buen planteamiento del modelo para el caso $N > 1$.

5. Analizar la existencia de estados estacionarios no triviales para el clarificador-espesador.

6. Extender el modelo para sedimentación continua de suspensiones con propiedades floculantes de la mezcla dependientes del tiempo [29].

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Anexos

## Anexo 1. Teorema de Harten y Lema de Helly

**Definición 5.1.** *Una función integrable $f$ real valuada es de variación acotada si esta tiene variación total finita, esto es, si,*

$$\mathrm{TV}(f) = \sup \sum_{j=1}^{m} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| < \infty,$$

*donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas $x_j < x_{j+1}$ tales que $x_j$ es un punto de continuidad aproximada de $f$ (esto es, $\delta^{-1}|x : |x-x_j| < \delta, |f(x)-f(x_j)| \geq \epsilon| \to 0$, para todo $\epsilon > 0$ cuando $\delta \to 0$.)*

**Lema 5.1.** *Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones de variación acotada en el intervalo real y acotado $[a, b]$. Si existe una constante $M$ tal que $\mathrm{TV}(u_n) \leq M$ y $\|u_n\|_\infty \leq M$, para cada $n$, entonces existe una subsucesión de $\{u_n\}$ la cual converge puntualmente en la norma $L^1$ en $[a, b]$ a una función de variación acotada.*

**Teorema 5.2.** *Considere un esquema general escrito en la forma,*

$$u_j^{n+1} = u_j^n + a_j(u_{j+1}^n - u_j^n) - b_{j-1}(u_j^n - u_{j-1}^n). \tag{5.1}$$

*Entonces,*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_{j+1}^n - u_j^n|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

*si las siguientes condiciones son satisfechas,*

$$a_j \geq 0, \quad b_{j-1} \geq 0, \quad a_j + b_j \leq 1, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

*Demostración.* Sea $n \in \mathbb{N}$ dado. De (5.1) tenemos que,

$$u_{j+1}^{n+1} = u_{j+1}^n + a_{j+1}(u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) - b_j(u_{j+1}^n - u_j^n), \tag{5.2}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



y,

$$u_j^{n+1} = u_j^n + a_j(u_{j+1}^n - u_j^n) - b_{j-1}(u_j^n - u_{j-1}^n). \tag{5.3}$$

Restando (5.2) y (5.3) y agrupando obtenemos que,

$$u_{j+1}^{n+1} - u_j^n = (1 - a_j - b_j)(u_{j+1}^n - u_j^n) + a_{j+1}(u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) + b_{j-1}(u_j^n - u_{j-1}^n).$$

Luego, haciendo uso de la desigualdad triangular y de las condiciones dadas, obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} (1 - a_j - b_j)|u_{j+1}^n - u_j^n| + \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j+1}|u_{j+2}^n - u_{j+1}^n| + \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_{j-1}|u_j^n - u_{j-1}^n| \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (1 - a_j - b_j)|u_{j+1}^n - u_j^n| + \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j|u_{j+1}^n - u_j^n| + \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j|u_{j+1}^n - u_j^n| \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (1 - a_j - b_j + a_j + b_j)|u_{j+1}^n - u_j^n| \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_{j+1}^n - u_j^n|,
\end{aligned}$$

esto es,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_{j+1}^n - u_j^n|.$$

□

# Anexo 2. Método de Engquist-Osher

Un método tradicional para aproximar la ley de conservación,

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [a,b] \subset \mathbb{R},$$

es el denominado Método de Engquist-Osher el cual fue propuesto por el matemático sueco Björn Engquist junto al matemático estadounidense Stanley Osher en 1981 [30]. El método consiste en aproximar usando la fórmula de avance,

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n), \quad j = 1, \ldots, M, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{5.4}$$

donde el flujo numérico viene dado por,

$$F_{j+1/2}^n = F^{\mathrm{EO}}(u_j^n, u_{j+1}^n) := \frac{f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)}{2} - \frac{1}{2}\int_{u_j}^{u_{j+1}} |f'(\theta)|\mathrm{d}\theta \tag{5.5}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



A pesar de que es un método ampliamente usado en el análisis numérico de leyes de conservación, notamos que éste presenta algunas limitaciones pues el término integral en (5.5) es difícil de tratar y normalmente cambia de acuerdo a la ecuación que estemos tratando. Por ejemplo, para los valores específicos del Ejemplo 3.5 en el Capítulo 3 obtuvimos el siguiente flujo:

$$F^n_{j+1/2} = \begin{cases} -q_{\mathrm{E}}(\phi_j^{n+1} - \phi_{\mathrm{F}}) & \text{si } j < I_H, \\ F_L^{\mathrm{EO}}(\phi_j^n, \phi_j^{n+1}) & \text{si } I_H < j < I_0, \\ F_R^{\mathrm{EO}}(\phi_j^n, \phi_j^{n+1}) & \text{si } I_0 < j < I_B, \\ q_{\mathrm{U}}(\phi_j^n - \phi_{\mathrm{F}}) & \text{si } j > I_B, \end{cases}$$

donde $F_L^{\mathrm{EO}}$ y $F_R^{\mathrm{EO}}$ vienen dados por,

$$F_L^{\mathrm{EO}}(u,v) = \begin{cases} -q_{\mathrm{E}}(u - \phi_{\mathrm{F}}) + V(u) & \text{si } u \le v \le \alpha, \\ -q_{\mathrm{E}}(u + v - \phi_{\mathrm{F}} - \alpha) + V(u) + V(v) - V(\alpha) & \text{si } u \le \alpha < v, \\ -q_{\mathrm{E}}(v - \phi_{\mathrm{F}}) + V(v) & \text{si } \alpha < u < v, \\ -q_{\mathrm{E}}(u - \phi_{\mathrm{F}}) + V(u) & \text{si } v < u \le \alpha, \\ -q_{\mathrm{E}}(\alpha - \phi_{\mathrm{F}}) + V(\alpha) & \text{si } v \le \alpha < u, \\ -q_{\mathrm{E}}(v - \phi_{\mathrm{F}}) + V(v) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $\alpha = \frac{6-\sqrt{13}}{9}$ y,

$$F_R^{\mathrm{EO}}(u,v) = \begin{cases} q_{\mathrm{U}}(u - \phi_{\mathrm{F}}) + V(u) & \text{si } u \le v \le \beta, \\ q_{\mathrm{U}}(u + v - \phi_{\mathrm{F}} - \beta) + V(u) + V(v) - V(\beta) & \text{si } u \le \beta < v < \gamma, \\ q_{\mathrm{U}}(u - \beta + \gamma - \phi_{\mathrm{F}}) - V(\beta) + V(\gamma) + V(u) & \text{si } u \le \beta \text{ y } v \ge \gamma, \\ q_{\mathrm{U}}(v - \phi_{\mathrm{F}}) + V(v) & \text{si } \beta < u < v < \gamma, \\ q_{\mathrm{U}}(\gamma - \phi_{\mathrm{F}}) + V(\gamma) & \text{si } \beta < u < \gamma \le v, \\ q_{\mathrm{U}}(u - \phi_{\mathrm{F}}) + V(u) & \text{si } \gamma \le u \le v, \\ q_{\mathrm{U}}(u - \phi_{\mathrm{F}}) + V(u) & \text{si } v \le u \le \beta, \\ q_{\mathrm{U}}(\beta - \phi_{\mathrm{F}}) + V(\beta) & \text{si } v \le \beta < u < \gamma, \\ q_{\mathrm{U}}(u - \phi_{\mathrm{F}} + \beta - \gamma) + V(v) - V(\gamma) + V(\beta) & \text{si } v \le \beta \text{ y } u \ge \gamma, \\ q_{\mathrm{U}}(\beta - \phi_{\mathrm{F}}) + V(\beta) & \text{si } v \le \beta < u < \gamma \\ q_{\mathrm{U}}(u - \phi_{\mathrm{F}}) + V(u) & \text{en otro caso ,} \end{cases}$$

con $\beta = \frac{30-\sqrt{165}}{45}$ y $\gamma = \frac{30+\sqrt{165}}{45}$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



# Anexo 3. Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Denotemos por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ la $\sigma-$álgebra de Borel en $[0,\infty]$.

**Teorema 5.3** (Lema de Fatou)**.** *Dado un espacio de medida $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, sea $\{f_n\}$, $f_n:\Omega\to[0,\infty]$, una sucesión de funciones $(\mathcal{F},\mathcal{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0}})-$medibles no negativas. Defina la función $f:\Omega\to[0,\infty]$ por, $f(x)=\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$, para cada $x\in\Omega$. Entonces, $f$ es $(\mathcal{F},\mathcal{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0}})$-medible, y también,*

$$\int_\Omega f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu.$$

*Demostración.* Ver [31]. □

Haciendo uso de este resultado podemos probar el Lema de Fatou inverso.

**Lema 5.2.** *Dado un espacio de medida $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, sea $\{f_n\}$, $f_n:\Omega\to[0,\infty]$, una sucesión de funciones $(\mathcal{F},\mathcal{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0}})-$medibles no negativas. Defina la función $f:\Omega\to[0,\infty]$ por, $f(x)=\limsup_{n\to\infty} f_n(x)$, para cada $x\in\Omega$. Si existe una función no negativa $g$ en $\Omega$ tal que, $f_n\leq g$, para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces, $f$ es $(\mathcal{F},\mathcal{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0}})$-medible, y también,*

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f d\mu.$$

*Demostración.* Considere la sucesión de funciones $\{g-f_n\}$. Observe que esta sucesión satisface todas las hipótesis del Teorema 5.3. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega g d\mu - \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega (g-f)d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega (g-f_n)d\mu\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega (g-f_n)d\mu\\ &\leq \int_\Omega g d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu.\end{aligned}$$

Como $g$ es integrable, entonces $\int_\Omega g d\mu<\infty$. Así, de lo anterior se deduce que,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f d\mu.$$

□

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



**Teorema 5.4** (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones real valuadas en un espacio de medida* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$*. Suponga que la sucesión de funciones converge puntualmente a una función* $f$ *y que existe* $g$ *integrable tal que,*

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

*para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y todo* $x \in \Omega$*. Entonces* $f$ *es integrable en el sentido de Lebesgue y,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0,$$

*lo cual también implica que,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

*Demostración.* Como $f$ es el límite puntual de una sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles que están dominadas por $g$, entonces $f$ también es medible y está dominada por $g$, en consecuencia, $f$ es integrable. Mas aún, de la definición de $f$ sabemos que,

$$\limsup_{n\to\infty} |f - f_n| = 0.$$

De la linealidad y monotonicidad de la integral de Lebesgue vemos que,

$$\left| \int_\Omega f d\mu - \int_\Omega f_n d\mu \right| = \left| \int_\Omega (f - f_n) \right| \leq \int_\Omega |f - f_n| d\mu.$$

Note que $|f - f_n|$ es acotada superiormente por una función integrable, en efecto,

$$|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2g.$$

Luego, podemos hacer uso del Lema 5.2 para obtener que,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n| d\mu \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} |f - f_n| d\mu = 0,$$

lo cual implica que el límite existe y se anula, esto es,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n| d\mu = 0.$$

Finalmente, dado que,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega f d\mu - \int_\Omega f_n d\mu \right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n| d\mu = 0,$$

también se sigue que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

□

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

# Bibliografía

[1] L. Svarovsky. Countercurrent washing of solids. In *Solid-Liquid Separation*, pages 442–475. Elsevier, 2001.

[2] R. Bürger, K.H. Karlsen, N.H. Risebro, and J.D. Towers. Well-posedness in $BV_t$ and convergence of a difference scheme for continuous sedimentation in ideal clarifier-thickener units. *Numerische Mathematik*, 97(1):25–65, 2004.

[3] M.L. McCaslin and J. Johnson. Liquid-solid separation in gold processing. pages 279–298, 2016.

[4] F. Betancourt, R. Bürger, and K.H. Karlsen. A strongly degenerate parabolic aggregation equation. *arXiv preprint arXiv:1007.1470*, 2010.

[5] A. Hazen. On sedimentation. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 53(2):45–71, 1904.

[6] R.T. Mishler. Settling slimes at the tigre mill. *Eng. Min. J*, 94(14):643–646, 1912.

[7] G. J. Kynch. A theory of sedimentation. *Transactions of the Faraday society*, 48:166–176, 1952.

[8] F. Concha and R. Bürger. A century of research in sedimentation and thickening. *KONA Powder and Particle Journal*, 20(1):38–70, 2002.

[9] C. Mejías. *Identificación de la función densidad de flujo mediante medición de curvas de asentamiento de suspenciones y simulación numérica de sedimentación continua*. Memória de título de ingeniero civil matemático, Departamento de Ingeniería Matemática. Universidad de Concepción, Marzo 2015.

[10] S. Diehl. Estimation of the batch-settling flux function for an ideal suspension from only two experiments. *Chemical Engineering Science*, 62(17):4589–4601, 2007.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



[11] S. Diehl. A conservation law with point source and discontinuous flux function modelling continuous sedimentation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 56(2):388–419, 1996.

[12] R. Bürger, W.L. Wendland, and F. Concha. Model equations for gravitational sedimentation-consolidation processes. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics*, 80(2):79–92, 2000.

[13] R. Bürger, K.H. Karlsen, and J.D. Towers. A model of continuous sedimentation of flocculated suspensions in clarifier-thickener units. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(3):882–940, 2005.

[14] R. Bürger, S. Diehl, and C. Mejías. A difference scheme for a degenerating convection-diffusion-reaction system modelling continuous sedimentation. *Preprint CI2MA*, 2018.

[15] H. Holden and N.H. Risebro. *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*. Springer, 2015.

[16] P.I. Richards. Shock waves on the highway. *Operations research*, 4(1):42–51, 1956.

[17] M. Hilliges and W. Weidlich. A phenomenological model for dynamic traffic flow in networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 29(6):407–431, 1995.

[18] F.A. Chiarello, H.D. Contreras, and L.M. Villada. Nonlocal reaction traffic flow model with on-off ramps. *Networks and Heterogeneous Media*, 17(2):203–226, 2022.

[19] A.S. Michaels and J.C. Bolger. Settling rates and sediment volumes of flocculated kaolin suspensions. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 1(1):24–33, 1962.

[20] P.A. Vesilind. Design of prototype thickeners from batch settling tests. *Water Sewage Works*, 115(7):302–307, 1968.

[21] A. Bressan. *Hyperbolic systems of conservation laws: the one-dimensional Cauchy problem*, volume 20. Oxford University Press on Demand, 2000.

[22] R. Bürger. *Apuntes para la asignatura Leyes de Conservación, Doctorado en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática*. Última actualización: 5 de Enero, 2022.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile



[23] H. Hanche-Olsen and H. Holden. The kolmogorov–riesz compactness theorem. *Expositiones Mathematicae*, 28(4):385–394, 2010.

[24] R. Bürger, A. García, K.H. Karlsen, and J.D. Towers. A family of numerical schemes for kinematic flows with discontinuous flux. *Journal of Engineering Mathematics*, 60(3):387–425, 2008.

[25] S. Diehl. Operating charts for continuous sedimentation i: Control of steady states. *Journal of Engineering Mathematics*, 41(2):117–144, 2001.

[26] D. Mitrovic. New entropy conditions for scalar conservation laws with discontinuous flux. *arXiv preprint arXiv:1011.4236*, 2010.

[27] K.H. Karlsen, N.H. Risebro, and J.D. Towers. $l^1$ stability for entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients. *Preprint series. Pure mathematics http://urn. nb. no/URN: NBN: no-8076*, 2003.

[28] E.Y. Panov. Existence of strong traces for quasi-solutions of multidimensional conservation laws. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 4(04):729–770, 2007.

[29] F. Betancourt, R. Bürger, S. Diehl, and S. Farås. Modeling and controlling clarifier–thickeners fed by suspensions with time-dependent properties. *Minerals Engineering*, 62:91–101, 2014.

[30] B. Engquist and S. Osher. One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws. *Mathematics of Computation*, 36(154):321–351, 1981.

[31] H. Royden and P. Fitzpatrick. *Real analysis*, volume 32. Macmillan New York, 1988.