Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Univesidad de Bío-Bío
Facultad de Ciencias
Departamento de Estadística y Departamento de Matemática
Programa de Magíster en Matemática,
mención Matemática Aplicada o
mención Estadística.

Algunos aspectos de la dinámica del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo

Tesis presentada por

Alex Yose Castillo Farroñan

al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada o Mención Estadística para la obtención del grado de

Magíster en Matemática con Mención en (Matemática Aplicada o Estadística).

Director: Dr. Claudio Vidal Díaz

Co-director: Dra. Paulina Martínez

Diciembre de 2022

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Algunos aspectos de la dinámica del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo

tesis presentada por

Alex Yose Castillo Farroñan

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención (Matemática Aplicada o Mención Estadística) del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en (Matemática Aplicada o Estadística) de la Universidad del Bío-Bío.

Aprobada por:

Dr. Claudio Vidal Díaz
Director
Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío

Dra. Paulina Martínez
Co-Director
Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío

Dr. Angelo Alberti
Profesor Informante
Universidad Federal de Sergipe, Brasil.

Dr. Dante Carrasco O.
Profesor Informante
Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío

Universidad del Bío-Bío
Facultad de Ciencias
Departamento Estadística y Departamento de Matemática

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Agradecimientos

A Dios, por haberme dado fuerzas y acompañado en todo mi camino hasta llegar a lograr mis objetivos.

Al grupo de investigación GISDA por el apoyo financiero.

También agradezco a las siguientes personas que contribuyeron directa e indirectamente en esta etapa de mi vida. Referente a lo académico, me gustaría agradecer a:

- A mi director y co-directora de tesis, Dr. Claudio Vidal y Dra. Paulina Martínez, por su guía, dedicación, amistad y sabios consejos;
- A los profesores Luis Miguel Villada, Tarik Faouzi y Verónica Anaya quienes me animaron y apoyaron incondicionalmente;
- A la señorita Secretaria de Dirección y de Magíster, Marcia Arriagada y al señor Auxiliar del departamento de Matemáticas Gonzalo Barahona por su amistad, apoyo y comprensión.

A nivel personal, estaré eternamente agradecido:

- A mis compañeros de estudio: Alex, Dalidet, Kerven, Luis y Javiera (mis amigos incondicionales), Yuliza, Juan Huancas, Juan Barajas y Carola por su apoyo incondicional;
- A los amigos y colegas que directa o indirectamente participaron en la realización de esta tesis, cuya lista sería extensa, y seguramente omitiría algunos nombres, lo que sería imperdonable. Por esto les agradezco a todos eternamente;
- A cada uno de mis sobrinos quienes siempre me animaron a seguir adelante y no flaquear ante las adversidades.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

- A mis tíos quienes siempre estuvieron pendientes de mí.
- A mi hijo de cuatro patas, mi fiel compañero, mí perro Káiser que siempre estuvo para mi en los momentos de alegría y tristeza.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Dedicatoria

Dedico con todo mi corazón esta tesis a mi madre Valeria Farroñan Tuñoque y a mi padre Eduardo Castillo Llontop, pilares fundamentales a lo largo de mi vida. Sin ellos, su amor y su apoyo incondicional en toda mi formación académica no podría haber logrado llegar a tan importante meta. Por supuesto, también va dedicado a toda mi familia y en especial a mis siete hermanos que me apoyaron moral y económicamente.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Resumen

En esta tesis estudiamos el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo dado por

$$W = \sum_{1 \leq k < j \leq N} \left[\frac{G m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|} + \frac{G m_k m_j C_{kj}}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^p} \right],$$

donde $m_k > 0$ son las masas y C_{kj} son constantes reales no nulas, siendo el exponente $p > 1$. A seguir, consideraremos la constante de Gravitación Universal $G = 1$.

Nuestro objetivo es estudiar las singularidades de este problema de N-cuerpos, en particular entender el rol del exponente p y el de las constantes C_{kj}. También caracterizaremos las soluciones que forman un polígono regular con masas iguales llamadas soluciones del tipo Maxwell. Además, caracterizaremos la estabilidad de este tipo de soluciones y el caso particular $N = 3$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Abstract

In this thesis we study the problem of N-fields with quasi-homogeneous potential given by

$$W = \sum_{1\leq k<j\leq N} \left[\frac{Gm_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|} + \frac{Gm_k m_j C_{kj}}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^p} \right],$$

where $m_k > 0$ are the masses and C_{kj} are non-zero real constants, being the exponent $p >1$. Next we will, consider the Universal Gravitation constant $G = 1$.

Our goal is to study the singularities of this N-body problem, in particular to understand the role of the exponent p and that of the constants C_{kj}. We will also characterize solutions that form a regular polygon with equal masses called Maxwell-type solutions. In addition, we will characterize the stability of this type of solutions and the particular case $N = 3$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Índice general

Resumen **xi**

Abstract **xiii**

Introducción **xvii**

1. Preliminares **1**
1.1. Problema de $\boldsymbol{N}$-cuerpos con potencial Newtoniano 1
1.1.1. Formulación del problema 2
1.1.2. Integrales primeras o de movimiento 3
1.1.3. Colisión total 4
1.1.4. Singularidades 7
1.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov 9
1.2.1. Sistemas autónomos 10
1.3. Sistemas lineales y linealización 15

2. Singularidades en el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo **21**
2.1. Problema de $\boldsymbol{N}$-cuerpos con potencial casi-homogéneo 21
2.1.1. Formulación del problema 22
2.2. Estudio de la colisión total en el problema de $\boldsymbol{N}$-cuerpos con potencial casi-homogéneo 22
2.2.1. Colisión total 23
2.3. Singularidades y colisión en el problema de $\boldsymbol{N}$-cuerpos con potencial casi-homogéneo 27

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

3. Problema tipo Maxwell de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo 45
3.1. Existencia de soluciones circulares en el problema tipo Maxwell de $\boldsymbol{N}$-cuerpos con potencial casi-homogéneo 45
3.2. Equilibrio relativo en el problema tipo Maxwell con potencial casi-homogéneo 61
3.2.1. Análisis del equilibrio relativo 63
3.3. Estabilidad de los equilibrios relativos en el problema tipo Maxwell con potencial casi-homogéneo 66
3.4. Estudio de la estabilidad de la solución tipo Maxwell con potencial casi-homogéneo para el caso $\boldsymbol{N = 3}$ y $\boldsymbol{p > 1}$ arbitrario 73

4. Conclusiones y trabajo futuro 83

Apéndice 87
4.1. Resultados auxiliares 87
4.2. Resultados de Análisis Matemático 89

Bibliografía 93

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Introducción

La ley de atracción gravitacional de Newton puede formularse de la siguiente manera: "La atracción mutua ejercida entre sí por dos puntos materiales P_1, P_2, de masas respectivas m_1, m_2, es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre los dos cuerpos". La constante de proporcionalidad G es llamada constante de Gravitación Universal.

La ley anterior es la base de todo el estudio de los movimientos orbitales, tanto en el sistema solar como fuera de él, pues determina también la dinámica de los sistemas estelares múltiples. Si pensamos en el sistema solar y prescindimos, por el momento, del hecho de que todos los cuerpos del mismo son sólidos (rígidos o no), la forma más general de modelar el movimiento de estos cuerpos es a través del llamado **problema de N-cuerpos**, que consiste en el estudio de N-puntos materiales atraídos entre sí por la ley de atracción gravitacional enunciada por Newton.

El problema de los N-cuerpos es un modelo matemático el cual tiene su origen en un modelo físico para explicar el movimiento de los astros (cuerpos celestes) en el sistema solar o fuera de él como se menciona anteriormente. Problemas similares a este fueron estudiados por célebres científicos a lo largo de la historia entre los cuales podemos citar además de Isaac Newton a Leonhard Euler [13], Carl Jacobi [17], Aleksandr Lyapunov [20], Henri Poincaré [37], Andréi Kolmogorov [3], Karl Weierstrass [30] y William Hamilton [31]. Sin embargo, estos grandes matemáticos no lograron dar una solución completa al problema original que consiste en predecir el movimiento de un conjunto de cuerpos celestes que interactúan entre sí gravitacionalmente. El tema sigue siendo materia de investigación muy activa hoy en día, sirviendo como un "punto de encuentro"entre varias disciplinas, como sistemas dinámicos y teoría ergódica, geometría (riemanniana, simpléctica y compleja), topología, cálculo de variaciones y teoría de Morse, análisis numérico y ciencias de la computación.

Newton en su libro "Principios matemáticos de la filosofía natural"[29] modeló el comportamiento de nuestro sistema solar, tal modelo consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo orden donde las variables serían

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

las coordenadas de los vectores-posición relativamente a un sistema inercial y la variable independiente es el tiempo, fáciles de plantear, pero difíciles de resolver y analizar. El objetivo era entonces describir estas coordenadas en términos de funciones explícitas del tiempo. Ahora, esto solo es posible para el caso en que $N = 2$, cuyo estudio completo se encuentra en el mencionado libro de Newton. Este caso se reduce a un problema de fuerza central en el cual la fuerza atractora varía como el inverso del cuadrado de la distancia, el llamado Problema de Kepler [7].

El modelo matemático para el problema Newtoniano de N-cuerpos es dado por

$$m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{N} \frac{m_k m_j (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^3} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_k}, \tag{1}$$

para cada $k = 1, \ldots, N$ donde

$$U = \sum_{1 \leq k < j \leq N} \frac{m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|}, \tag{2}$$

es el potencial Newtoniano y $m_k > 0$ para cada $k = 1, \ldots, N$. Notemos que el sistema definido en (1) es analítico en $\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta$ donde,

$$\Delta = \bigcup_{k<j} \Delta_{kj}. \tag{3}$$

$\Delta_{kj} = \left\{ \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N} : \boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_j \right\}$. Δ representa el conjunto de singularidades de la EDO de segundo orden y Δ_{kj} representa una colisión binaria entre la partícula $\boldsymbol{r}_k$ y $\boldsymbol{r}_j$.

Este modelo nos ayuda a representar algunos aspectos de sistemas reales como las interacciones que ocurren en nuestro sistema planetario solar (por ejemplo, las interacciones Tierra-Luna y el sistema Tierra-Luna-Sol) y en numerosos sistemas estelares. Los problemas de mayor estudio y análisis dentro de la comunidad científica en la disciplina Matemática de la Mecánica Celeste derivados del problema de N- cuerpos son los que brevemente describiremos a continuación:

1. **El problema de 2-cuerpos:** Consiste en determinar el movimiento de dos partículas puntuales que solo interactúan entre sí. Un ejemplo clásico sería un planeta orbitando una estrella.

2. **El problema de 3-cuerpos:** Las partículas forman según su configuración un triángulo o movimiento colineal. El caso $N = 3$ es extremamente difícil como el propio Newton reconoció al estudiar el sistema Sol-Tierra-Luna. Clairaut y D'Alembert [4] estudiaron todo lo referente a este problema y además acuñaron la expresión

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

"problema de los 3-cuerpos"[8], gracias a ellos por extensión lo designamos como el "problema de los N-cuerpos "para un valor cualquiera de N.

El objetivo de estudio de la presente tesis justamente está motivado por un modelo matemático importante, nos referimos al problema de N-cuerpos con potencial tipo Manev. En 1930 el Físico Búlgaro Georgi Manev [21] obtuvo un modelo similar al de Newton que obedece a potenciales de la forma

$$W = \sum_{1\leq k<j\leq N} m_k m_j \left[\frac{A}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|} + \frac{B}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^2}\right], \tag{4}$$

donde conforme a lo descrito en [5], A y B son constantes y los potenciales homogéneos son de grado -1 y -2, respectivamente. Manev propuso este modelo como un sustituto alternativo de la relatividad. Su importancia radica en dar respuesta a las necesidades teóricas de la Mecánica Celeste, es decir, mantiene la la característica y ventajas de la Mecánica Newtoniana. Algunos autores han estudiado el problema tipo Manev suponiendo $A = B = 1$, por ejemplo, en [10].

Florin Diacu [10] a principios de la década de 1990 propuso el estudio de la ley gravitacional de Manev, dada por una pequeña perturbación de la ley de Gravitación Universal de Newton, en el contexto general lo llamó potenciales casi-homogéneos. En varios artículos, escritos solo o en colaboración, demostró que la ley de Manev proporciona una explicación clásica del avance del perihelio de Mercurio tomando $A = 1$ y $B = 1/c^2$ donde c es la velocidad de la luz, este fenómeno es un caso límite entre la ley de gravitación de Newton y la de Manev [41].

Las ecuaciones de movimiento que modelan el problema de N-cuerpos del tipo Manev vienen dadas por

$$m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{N} m_k m_j \left[\frac{A(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^3} + \frac{B(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^4}\right] = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{r}_k}, \tag{5}$$

para cada $k = 1, \ldots, N$. Observemos que el sistema (5) también es analítico en $\mathbb{R}^{3N}\backslash\Delta$.

Se ha generalizado el problema de N-cuerpos con potencial tipo Manev para un potencial casi-homogéneo de la forma

$$W = \sum_{1\leq k<j\leq N} m_k m_j \left[\frac{A_{kj}}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^a} + \frac{B_{kj}}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^b}\right], \tag{6}$$

donde $0 < a < b$, A_{kj} y B_{kj} son constantes reales. En este caso las ecuaciones de movimiento son de la siguiente forma

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{j=1,j\neq k}^{N} m_k m_j \left[a\frac{A_{kj}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^{a+1}} + \frac{bB_{kj}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^{b+2}} \right] = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{r}_k}, \tag{7}$$

para cada $k = 1, \ldots, N$. Este problema ha sido estudiado por algunos autores, a saber, [9], [26], [33], [12] y [5].

En esta tesis consideraremos el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo de la forma $W = U + V$, donde

$$U = \sum_{1\leq k<j\leq N} \frac{m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|}, \quad V = \sum_{1\leq k<j\leq N} \frac{C_{kj} m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^p}, \tag{8}$$

es decir, U es el potencial Newtoniano y V es un potencial homogéneo de grado $-p$ con $p > 1$. Las ecuaciones de movimiento admiten la siguiente forma

$$m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \left[\frac{m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^3} + \frac{pC_{kj} m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^{p+2}} \right] (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k) = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{r}_k}, \tag{9}$$

para cada $k = 1, \ldots, N$ y $C_{kj} = C_{jk}$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$ son constantes reales no nulas y $m_k > 0$ para cada $k = 1, \ldots, N$.

De acuerdo a Wintner en [43], una colisión total corresponde a la singularidad $\boldsymbol{r} = 0$, es decir, $\boldsymbol{r}_k = 0$ para cada $k = 1, \ldots, N$. Por otro lado, si $\boldsymbol{r}(t)$ es una solución del problema (9) definida en su intervalo maximal (t_-, t_+), si $t_* = t_+ < \infty$ la solución se dice singular y t_* es una singularidad de la solución. Si t_* es una singularidad de la solución, entonces se dice que ella es debida a colisión si existe $\boldsymbol{r}^* \in \Delta$ tal que $\boldsymbol{r}(t) \longrightarrow \boldsymbol{r}^*$ cuando $t \to t_*$. Si $\boldsymbol{r}(t)$ cuando $t \to t_*$ no posee límite decimos que la singularidad t_* es una pseudocolisión, vea detalles en [42], [43], [44] y [38].

Un problema importante de la Mecánica Celeste (caso Newtoniano) consiste en estudiar la colisión total y saber si las singularidades del problema de N-cuerpos Newtoniano son o no debidas a colisión. El estudio de la colisión total se encuentra en [43], [40], [10], también se encuentra en [38]. Se demuestra que la colisión total ocurre en tiempo finito y el momento angular total debe ser nulo [40]. El estudio de las singularidades se encuentra en diferentes trabajos, en particular citamos los trabajos de Painlevé [32], Von Zeipel [42], McGehee [22], Xia [44] y Diacu [10].

Para el problema casi-homogéneo en (9) considerando $A_{kj} = B_{kj} = 1$, $k, j = 1, \ldots, N$, en [34] y [45] se demuestra que la colisión total ocurre en tiempo finito y además que el momento angular total es nulo. El estudio de las singularidades para este problema fue estudiado también por [34] y [45]. Sin embargo, no hemos encontrado literatura que trate el estudio de las singularidades en el problema casi-homogéneo. R. Jones [18] trabajo con potenciales casi-homogéneos de la forma (6) donde $A_{kj} = b$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

y $B_{kj} = a$, él estudió las configuraciones centrales y caracterizo la velocidad angular admisible para la cual existe una solución polígono regular con masas iguales y radio unitario.

Un primer objetivo de esta tesis consiste en estudiar la colisión total en el problema definido en (9). En particular deseamos entender el rol que juegan las constantes C_{kj}.

Un segundo objetivo de esta tesis consiste en estudiar las singularidades de igual manera en el problema definido en (9). De igual manera deseamos entender el rol que juegan las constantes C_{kj}.

Un tercer objetivo dice relación con el estudio de la solución periódica tal que en cada instante forma un polígono regular. Este tipo de soluciones serán llamadas soluciones del tipo Maxwell. Más precisamente, nuestro estudio radica en la existencia de dichas soluciones y su estabilidad (espectral) o inestabilidad, en función de las constantes C_{kj}, del radio del círculo que contienen las partículas y de las masas. La estabilidad se hace de manera detallada para $N = 3$. Las soluciones del tipo Maxwell son parametrizadas por

$$\boldsymbol{r}_k(t) = \rho e^{i(\omega t+\theta_k)}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{10}$$

donde,

$$\theta_k = \theta_0 + 2\pi \left(\frac{k-1}{N}\right), \quad k = 1, \ldots, N.$$

El estudio de las soluciones del tipo Maxwell en el caso Newtoniano ha sido desarrollado por Perko y Walter [36] quien demostró que para $N \geq 4$ las funciones dadas (10) son soluciones del problema de N-cuerpos, si y solo sí, todas las masas son iguales, y se verifica que existe un único radio admisible fijado el valor $m = m_k$, $k = 1, \ldots, N$. Por otro lado, el estudio de la estabilidad se debe entender en el sentido espectral, es decir, dejando de lado los valores propios nulos el resto de los valores propios deben ser todos imaginarios puros para la matriz del sistema linealizado.

Se sabe por Moeckel [27] que la solución polígono regular para problemas con potencial gravitacional (y sin masa central) para $N \geq 4$ son siempre inestables, y para $N = 3$, la solución triangulo equilátero de Lagrange con masas iguales es inestable.

Para conseguir los objetivos de esta tesis la hemos organizado de la siguiente forma. En el Capítulo 1 presentamos conceptos básicos sobre el problema de N-cuerpos newtoniano U, sus ecuaciones de movimiento, formulación Hamiltoniana, integrales primeras de movimiento, colisión total y singularidades, además de algunos lemas y teoremas de gran relevancia para el desarrollo de esta tesis. Se presentan importantes definiciones sobre la estabilidad en el sentido de Lyapunov así como estabilidad espectral y lineal.

El Capítulo 2 está dedicado al estudio del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo W formado por una suma de potenciales (8) U y V donde V es el

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

potencial homogéneo de grado $p > 1$ como se observa en las ecuaciones anteriores. Estudiamos la colisión total y las singularidades, además caracterizamos las singularidades debida a colisión. Aplicamos dicho estudio al problema colineal de 3-cuerpos y al problema no colineal.

En el Capítulo 3 estudiamos la existencia de soluciones periódicas con velocidad angular ω y masas iguales formando un polígono regular sobre un círculo de radio ρ (éstas soluciones serán llamadas del tipo Maxwell) asumiendo que $C_{kj} = C$ para todo $k, j = 1, \ldots, N$. Caracterizamos los posibles radios en función de C, m y p. Verificamos que la existencia de soluciones tipo Maxwell con potencial están condicionadas a satisfacer la siguiente ecuación

$$\frac{\omega^2}{m}\rho^{p+2} - \frac{A}{4}\rho^{p-1} - \frac{pBC}{2^{p+1}} = 0,$$

donde

$$A = 2\sum_{l=1}^{[N/2]} \left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|, \quad B = 2\sum_{l=1}^{[N/2]} \left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|^p \tag{11}$$

son constantes positivas para cada $l = 1, \ldots, N$. Hemos demostrado que para $C_{kj} = C > 0$ existe un único radio admisible que da origen a una solución tipo Maxwell para el problema de los N-cuerpos con potencial casi-homogéneo. Por otro lado, en el caso $C_{kj} = C < 0$ existen 2, 1 o no existen radios admisibles. De hecho, existe un valor crítico de m denotado por $m_\sharp = \omega^2(p+2)\left(-BCp(p+2)A^{-1}\right)^{3/(p-1)}/2A(p-1)$ tal que si $m < m\sharp$ no existen radios admisibles. Si $m = m_\sharp$ existe un único radio admisible que da origen a una única solución tipo Maxwell. Si $m > m\sharp$, entonces existen dos radios admisible denotados por ρ_1 y ρ_2 tal que $\rho_* = 1/2\left(-pBC/A\right)^{1/p-1} < \rho_1 < \rho_\sharp = 1/2\left(-(BC/3A)p(p+2)\right)^{1/p-1}$ y $\rho_2 > \rho_\sharp$ cada una de ellas da origen a una solución tipo Maxwell.

Además, garantizamos que uno de los factores del polinomio característico de la matriz Hamiltoniana asociada a un equilibrio relativo es $\lambda^2(\lambda^2 - \alpha + 3\omega^2)$ donde $\alpha = 2\mu + (p+1)\nu$ tal que $\mu = Am/4\rho^3$ y $\nu = mpBC/2^{p+1}\rho^{p+2}$. El otro factor del polinomio característico es de la forma $(\lambda^2 + \omega^2)^2$.

Finalizamos este capítulo con el estudio de la estabilidad para el caso $N = 3$. Concluimos que para $C > 0$ la solución tipo Maxwell es inestable en el sentido de Lyapunov. Para $C < 0$ la solución tipo Maxwell con $\rho = \rho_1$ es espectralmente estable si $\rho_* = \left(-3pC/3^{(p+1)/2}\right)^{1/(p-1)} < \rho_1 \leq \rho_\sharp \left(-p(p+1)C/3^{(p+1)/2}\right)^{1/(p-1)}$, mientras que la solución $\rho = \rho_2$ es espectralmente estable si $\rho_\sharp < \rho_2 \leq \rho_+ = \left(-3p^2C/3^{(p+1)/2}\right)^{1/(p-1)}$ e inestable en el sentido de Lyapunov si $\rho > \rho_+$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Santoprete [39] en su estudio de la estabilidad para el caso $N = 3$ toma para los potenciales casi-homogéneos exponentes generales a y b, coeficientes de la forma $A_{kj} = B_{kj} = 1$ con masas arbitrarias m_1, m_2, m_3. En su análisis demuestra que cuando $0 < b < 2 < a$ la solución triángulo equilátero es inestable si, dada una función $f = (m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)/(m_1 + m_2 + m_3)^2$ se tiene que $f > (1/3)[(b-2)/(b+2)]^2$.

Ahora, para nuestro análisis tomamos exponentes de la forma $a = p$ y $b = 1$ siendo el coeficiente que acompaña al potencial homogéneo $C_{kj} = C$ con masas $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Se sigue entonces que nuestro estudio corresponde de manera equivalente al Teorema 3 ítem (b) caso (i) de Santoprete, obteniendo con estas notaciones que si $0 < 1 < 2 < p$ obtenemos $f = 1/3$ donde se satisface que $1/3 > 1/27$. Por lo tanto, la solución triángulo equilátero es inestable dadas las condiciones anteriores. Cabe recalcar que en el análisis de Santoprete no toma el caso donde $p = 2$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dedicado a recordar los principales conceptos y resultados relacionados con el problema Newtoniano de los N-cuerpos de la Mecánica Celeste tales como, formulación Hamiltoniana, integrales primeras, colisión total, singularidades, la Identidad de Lagrange-Jacobi, Teorema de Sundman [40], Teorema de Painlevé [32] y Teorema de Von Zeipel [42] que serán de importancia en el desarrollo de esta tesis. Además, se introducirán definiciones sobre estabilidad en el sentido de Lyapunov y estabilidad espectral [16], [35].

1.1. Problema de N-cuerpos con potencial Newtoniano

Cuando tres ó más cuerpos se mueven debido únicamente a su atracción gravitacional mutua el movimiento resulta más complejo aumentando rápidamente su dificultad con el número de partículas involucradas. El problema Newtoniano de N-cuerpos puede ser formulado matemáticamente de tal modo que conociendo la posición y velocidad inicial de un cuerpo respecto del otro en un determinado instante se puede predecir su posición y velocidad en el espacio en cualquier otro instante. Este modo de determinar el movimiento constituye una solución matemática cerrada del problema. Pero, si más de dos cuerpos están involucrados en el estudio dinámico como se mencionó antes en general encontrar las soluciones explícitas es imposible. Sin embargo, ciertos casos particulares pueden ser tratados analíticamente [15], [7].

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

1.1.1. Formulación del problema

El problema de N-cuerpos Newtoniano consiste en describir el movimiento de N-partículas materiales de masas arbitrarias positivas $m_1, m_2, \ldots, m_N$, cuyos vectores posición $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ se mueven en un sistema de referencia en $\mathbb{R}^3$ y que interactuan únicamente a través de su atracción gravitacional mutua.

Así, usando la ley de Gravitación Universal se describen las ecuaciones de movimiento de las N-partículas a lo largo de una solución $\boldsymbol{r}(t)$ como sigue

$$m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{N} \frac{m_k m_j (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^3} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_k}, \tag{1.1}$$

para cada $k = 1, \ldots, N$ donde,

$$U = \sum_{1\leq k<j\leq N} \frac{m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|}, \tag{1.2}$$

es el potencial Newtoniano (ver detalles en [25]) y $m_k > 0$ para cada $k = 1, \ldots, N$. El sistema de ecuaciones diferenciales (1.1) es un sistema de $3N$ ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Denotamos al vector posición del centro de masa por

$$C_M = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}_k, \tag{1.3}$$

donde $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ representa la masa total del sistema.

Verificamos que $C_M(t) = \dot{\boldsymbol{r}}_M(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}_M(t) = \boldsymbol{0}$. En efecto, sea $\boldsymbol{q}_k(t) = \boldsymbol{r}_k(t) - \boldsymbol{r}_M(t)$, entonces $\ddot{\boldsymbol{q}}_k(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}_k(t)$. Luego,

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{q}_k(t) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}_k(t) - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}_M(t) = \boldsymbol{r}_M(t) - \boldsymbol{r}_M(t) = 0. \tag{1.4}$$

Consideremos $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ y sea M la matriz diagonal de $3N \times 3N$, donde $M = \operatorname{diag}(m_1, m_1, m_1, \ldots, m_N, m_N, m_N)$, por lo tanto, el sistema de $3N$ ecuaciones dadas en (1.1) ahora se escribe de la siguiente forma

$$M\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{1.5}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Definición 1.1. *Sea* $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$. *Definimos por*

$$\boldsymbol{p}_k = m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k, \tag{1.6}$$

al momento lineal de la k*-ésima partícula.*

Con la notación anterior podemos ver que las ecuaciones de movimiento en (1.1) o (1.5) se pueden expresar mediante el siguiente sistema Hamiltoniano de ecuaciones diferenciales de primer orden dados por

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_k &= \frac{\boldsymbol{p}_k}{m_k} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_k}, \\ \dot{\boldsymbol{p}}_k &= \sum_{j=1, j\neq k}^{N} \frac{m_k m_j (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^3} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_k}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

para cada $k = 1, \ldots, N$ donde,

$$H = T - U, \tag{1.8}$$

es la función Hamiltoniana y T es la **energía cinética** dada por la siguiente ecuación

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \|\dot{\boldsymbol{r}}_k\|^2. \tag{1.9}$$

Notamos que la función H representa la función Hamiltoniana asociado al problema de N-cuerpos con potencial Newtoniano.

1.1.2. Integrales primeras o de movimiento

Definición 1.2. *Una función diferenciable* $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$, *donde* $M \subset (\mathbb{R}^{3N} \backslash \Delta) \times \mathbb{R}^{3N}$, *es una* ***integral primera*** *para el sistema* (1.7) *si ella no es cambiante, pero es constante a lo largo del movimiento, es decir,* $\dfrac{dF}{dt}(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t)) = 0$ *para todo tiempo, donde* $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ *es la solución de* (1.1).

A lo largo de cada solución de las ecuaciones (1.7) la energía total $H = T(\boldsymbol{r}(t)) - U(\boldsymbol{r}(t))$ dada en (1.8) es una integral primera (llamada energía total). De hecho, derivando la ecuación (1.8) respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{N} m_k \langle \dot{\boldsymbol{r}}_k(t), \ddot{\boldsymbol{r}}_k(t) \rangle - \sum_{k=1}^{N} m_k \langle \nabla_{\boldsymbol{r}_k}, \dot{\boldsymbol{r}}_k(t) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{N} m_k \langle \dot{\boldsymbol{r}}_k(t), \ddot{\boldsymbol{r}}_k(t) \rangle - \sum_{k=1}^{N} m_k \langle \ddot{\boldsymbol{r}}_k(t), \dot{\boldsymbol{r}}_k(t) \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Entonces, H es constante, es decir, se conserva a lo largo de cada solución.

A seguir, verificamos que el momento angular total

$$\mathcal{C} = \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{p}_k \quad \in \mathbb{R}^3, \tag{1.11}$$

es una integral primera, es decir, cada una de sus componentes es una integral primera. De hecho, derivando la ecuación (1.11) a lo largo de una solución obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{C}} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{N} (m_k \boldsymbol{p}_k(t) \times \boldsymbol{p}_k(t) + m_k \boldsymbol{r}_k(t) \times \dot{\boldsymbol{p}}_k(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{N} m_k (\boldsymbol{p}_k(t) \times \boldsymbol{p}_k(t) + \boldsymbol{r}_k(t) \times \dot{\boldsymbol{p}}_k(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{N} m_k (\boldsymbol{r}_k(t) \times \dot{\boldsymbol{p}}_k(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq k}^{N} m_k m_j (\boldsymbol{r}_k(t) - \boldsymbol{r}_j(t)) \times \frac{\boldsymbol{r}_k(t) - \boldsymbol{r}_j(t)}{\|\boldsymbol{r}_k(t) - \boldsymbol{r}_j(t)\|}.
\end{aligned}$$

Luego, como el vector $\boldsymbol{r}_k(t) - \boldsymbol{r}_j(t)$ es paralelo a $\dfrac{\boldsymbol{r}_k(t) - \boldsymbol{r}_j(t)}{\|\boldsymbol{r}_k(t) - \boldsymbol{r}_j(t)\|}$ concluimos que $\dot{\mathcal{C}} = 0$. Así, $\mathcal{C}$ es una integral primera.

Las tres componentes del momento angular son constantes de movimiento, así como las tres componentes del centro de masa y las tres componentes del momento lineal. Recuerde que la energía H también es una integral primera, por lo que hemos encontrado al menos diez integrales de movimiento o integrales primeras del problema Newtoniano de los N-cuerpos.

1.1.3. Colisión total

En esta sección estudiaremos un resultado importante estudiado por a Sundman en 1907 [40] el cual entrega información de una solución que tiende a una colisión total.

Definición 1.3. *Se define el momento de inercia del problema de N-cuerpos con potencial Newtoniano por*

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \|\boldsymbol{r}_k\|^2. \tag{1.12}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

De ahora en adelante por cuestiones de no sobrecargar la notación omitiremos cuando se requiera, el evaluar $\boldsymbol{r}, U, I, T, etc$ a lo largo de una solución $\boldsymbol{r}(t)$ dada, pero se sobrentiende que es así.

Lema 1.1. *(**Identidad de Lagrange-Jacobi**). Sea I el momento de inercia, T la energía cinética, U el potencial Newtoniano y h la constante de energía. Se tiene que, a lo largo de una solución $\boldsymbol{r}(t)$ del problema de los N-cuerpos Newtoniano se satisface*

$$\ddot{I} = 2T(\boldsymbol{p}(t)) - U(\boldsymbol{r}(t)) = T(\boldsymbol{p}(t)) + h. \tag{1.13}$$

Demostración. Puesto que el potencial Newtoniano es homogéneo de grado -1 se sigue del Teorema de Euler 4.12 del Apéndice que

$$-U(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^t \nabla U(\boldsymbol{r}). \tag{1.14}$$

Por otro lado, derivando el momento de inercia dado en (1.12) obtenemos

$$\dot{I} = \sum_{k=1}^{N} m_k \|\boldsymbol{r}_k\| \|\dot{\boldsymbol{r}}_k\|.$$

Luego,

$$\ddot{I} = \sum_{k=1}^{N} m_k \|\dot{\boldsymbol{r}}_k\|^2 + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k. \tag{1.15}$$

Usando las ecuaciones (1.14) y (1.15) obtenemos

$$\ddot{I} = 2T(\boldsymbol{p}(t)) - U(\boldsymbol{r}(t)).$$

Ahora, de la relación de energía $h = T - U$ se tiene que $U = T - h$. Así, reemplazando esta igualdad en la ecuación anterior el lema queda demostrado. ■

En algunas ocasiones cuando nos refiramos a una solución de N-cuerpos Newtoniano escribiremos $\boldsymbol{r}(t)$ en lugar de $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$.

Ahora, veremos los siguientes resultados clásicos.

Lema 1.2. *(**Desigualdad de Sundman**). Sea $c = \|\mathcal{C}\|$ la magnitud del momento angular y $h = T - U$ la energía total, entonces a lo largo de una solución $\boldsymbol{r}(t)$ del problema de N-cuerpos Newtoniano se satisface*

$$c^2 \leq 4I(\ddot{I} - h). \tag{1.16}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Demostración. De la definición de $\mathcal{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} c = \|\mathcal{C}\| &= \left\| \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}_k \times \dot{\boldsymbol{r}}_k \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} m_k \|\boldsymbol{r}_k\| \|\dot{\boldsymbol{r}}_k\| = \sum_{k=1}^{N} (\sqrt{m_k}\|\boldsymbol{r}_k\|)(\sqrt{m_k}\|\dot{\boldsymbol{r}}_k\|). \end{aligned}$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al lado derecho de la ecuación anterior y de las definiciones dadas en (1.9) y (1.12) tenemos

$$\begin{aligned} c^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \|\boldsymbol{r}_k\|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \|\dot{\boldsymbol{r}}_k\|^2 \right), \\ \frac{c^2}{4} &\leq \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \|\boldsymbol{r}_k\|^2 \right) \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \|\dot{\boldsymbol{r}}_k\|^2 \right), \\ \frac{c^2}{4} &\leq IT, \\ c^2 &\leq 4IT. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando la identidad de Lagrange-Jacobi $T = \ddot{I} - h$ en la ecuación anterior obtenemos la desigualdad del lema. ■

Teorema 1.1. *(**Teorema de Sundman para la colisión total**). Asuma que $\boldsymbol{r}(t)$ es una solución del problema de N-cuerpos con potencial Newtoniano tal que $I(\boldsymbol{r}(t)) \longrightarrow 0$ cuando $t \to t_*$, entonces $t_* < \infty$ y $\mathcal{C} = 0$.*

Demostración. Sea h la constante de energía asociada a la solución $\boldsymbol{r}(t)$. Entonces, por (1.13) $\ddot{I} = T + h$. Suponga que $I(\boldsymbol{r}(t))$ está definida para todo $t \geq 0$ y $I(\boldsymbol{r}(t)) \to 0$ cuando $t \to \infty$. De hecho, si para $t = +\infty$ encontramos $r_{kj} \to 0$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$ entonces,

$$U(\boldsymbol{r}(t)) = \sum_{1 \leq k < j \leq N} \frac{m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k(t) - \boldsymbol{r}_j(t)\|} \longrightarrow \infty.$$

Ahora, por la identidad de Lagrange-Jacobi en (1.13) y dado que h es una constante, $T(\boldsymbol{r}(t)) \to \infty$ y por ende $\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) \to \infty$. Luego, existe $t_\sharp > 0$ tal que $\ddot{I} \geq 2$ para todo $t \geq t_\sharp$. Integrando entre 0 y t esta desigualdad tenemos $I(\boldsymbol{r}(t)) \geq t^2 + at + b$, para todo $t \geq t_\sharp$, donde a y b son constantes. Pero, esto contradice el hecho que $I(\boldsymbol{r}(t)) \to 0$ cuando $t \to t*$. Por lo tanto, $t_* < \infty$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Por otro lado, suponga que $I(\boldsymbol{r}(t)) \to 0$ cuando $t \to t_*^- < \infty$. Acabamos de mostrar que $U(\boldsymbol{r}(t)) \to \infty$ y $\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) \to \infty$. Así, existe un $t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) > 0$ en $t_2 \leq t < t_*$. Como $I(\boldsymbol{r}(t)) > 0$, $\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) > 0$ en $t_2 \leq t < t_*$, y $I(\boldsymbol{r}(t)) \to 0$ cuando $t \to t_*$ se sigue del Lema 4.2 del Apéndice que $\dot{I}(\boldsymbol{r}(t)) \leq 0$ en $t_2 \leq t < t_*$.

Ahora, multiplicamos ambos lados de la desigualdad de Sundman dada en (1.16) por $-\dot{I}I^{-1} > 0$ para obtener

$$-\frac{1}{4}c^2 I^{-1}\dot{I} \leq h\dot{I} - \dot{I}\ddot{I}.$$

Integrando entre $\tilde{t}$ y t esta desigualdad obtenemos

$$\frac{1}{4}c^2 \leq \frac{hI + K}{\log I^{-1}},$$

donde $K = \dfrac{1}{2}\dot{I}^2(\tilde{t}) - hI(\tilde{t}) - \dfrac{1}{4}c^2 \log I(\tilde{t})$.

Luego, como $I(\boldsymbol{r}(t)) \to 0$ cuando $t \to t_1$ se tiene que el lado derecho de la ecuación anterior tiende a cero. Lo cual implica que $c = \|\mathcal{C}\| = 0$, y por ende $\mathcal{C} = 0$. ■

1.1.4. Singularidades

Definición 1.4. *Consideremos $\boldsymbol{r}(t)$ una solución del problema de N-cuerpos con potencial Newtoniano, denotaremos por*

$$\delta(\boldsymbol{r}(t)) = \min_{1\leq k<j\leq N} r_{kj}(t) \quad y \quad \mathcal{R}(\boldsymbol{r}(t)) = \max_{1\leq k<j\leq N} r_{kj}(t), \tag{1.17}$$

como la mínima y máxima distancia entre las distancias mutuas de los N-cuerpos a lo largo de una solución $\boldsymbol{r}(t)$.

Denotamos por $r_{kj}(t) = \|\boldsymbol{r}_k(t) - \boldsymbol{r}_j(t)\|$ para cada $k, j = 1, \ldots N$ a las distancias mutuas entre los N-cuerpos.

Lema 1.3. *El momento de inercia del sistema Newtoniano de los N-cuerpos se puede reescribir como*

$$I = \frac{1}{2M}\sum_{j=1, j\neq k} m_k m_j r_{kj}^2. \tag{1.18}$$

Demostración. Fijando j tenemos que

$$\sum_{k=1}^{N} m_k(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j)^2 = \sum_{k=1}^{N} m_k(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j)\cdot(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j) = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 - 2\boldsymbol{r}_j \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}_k + \left(\sum_{k=1}^{N} m_k\right) r_j^2.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Por tanto, de (1.4) se sigue

$$\sum_{k=1}^{N} m_k(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j)^2 = 2I + Mr_j^2.$$

Multiplicando ambos lados por m_j, sumando en j y usando $(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j)^2 = \langle \boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j \rangle = r_{kj}^2$ encontramos que

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} m_k m_j r_{kj}^2 = 2I\sum_{j=1}^{N} m_j + M\sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2 = 4IM.$$

Ahora, como $r_{kj} = 0$ cuando $k = j$ se deduce la ecuación (1.18). ■

Si se nos da una posición inicial $\boldsymbol{r}(0) \in \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta$ (Δ es definida en (3)) y una velocidad inicial $\dot{\boldsymbol{r}}(0) \in \mathbb{R}^{3N}$, entonces el Teorema de Existencia y Unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias nos asegura la existencia de una solución única $\boldsymbol{r}(t)$ definida en un intervalo maximal. Las componentes del vector $\boldsymbol{r}$ son funciones analíticas reales de t y de las coordenadas $\boldsymbol{r}(0)$ y $\dot{\boldsymbol{r}}(0)$.

Definición 1.5. *Sea $\boldsymbol{r}(t)$ una solución del problema Newtoniano de N-cuerpos definida en su intervalo maximal (t_-, t_+). Cuando uno de los extremos del intervalo maximal es infinito, digamos $t_* = t_+ = +\infty$, entonces se dice que la solución es **regular** en t_*.*

Definición 1.6. *Sea $\boldsymbol{r}(t)$ una solución del problema Newtoniano de los N-cuerpos definida en su intervalo maximal (t_-, t_+). Cuando uno de los extremos del intervalo maximal es finito, digamos $t_* = t_+ < \infty$, entonces se dice que la solución es **singular** y t_* es una **singularidad** de la solución.*

Definición 1.7. *Suponga que $\boldsymbol{r}(t)$ tiene una singularidad en t_*; esta singularidad es llamada una **singularidad de colisión** si existe $\boldsymbol{r}^* \in \Delta$ tal que $\boldsymbol{r}(t) \longrightarrow \boldsymbol{r}^*$ cuando $t \to t_*$. En caso contrario, la singularidad es llamada pseudocolisión.*

A continuación, enunciaremos el resultado obtenido por Painlevé [32] en el caso euclidiano, este muestra que una solución analítica definida en $[0, t_*)$ tiene una singularidad en t_*, si y solo si, el límite inferior del mínimo de las distancias mutuas r_{kj} se anula cuando $t \to t_*$. Más detalles y demostración se pueden encontrar en [10].

Teorema 1.2. ***(Painlevé [32]).*** *Considere $\boldsymbol{r}(t)$ una solución del problema Newtoniano de los N-cuerpos dado por $\delta(t) = \min\limits_{1\le k<j\le N}\{r_{kj}\}$. Si el movimiento es regular para $t < t_*$ pero no para $t = t_*$, entonces $\delta(t) \to 0$ cuando $t \to t_*$, es decir, que para t suficientemente cerca de t_*, $\delta(t)$ es inferior a toda cantidad ε dada.*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

El teorema anterior nos indica que una condición necesaria y suficiente para tener una singularidad en el instante $t = t_*$ es que $\boldsymbol{r}(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \to t_*$. Sin embargo, Painlevé también observó que la condición de que $\boldsymbol{r}(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \to t_*$ no implica que la singularidad se deba a colisión. De hecho, podría suceder que algunas de las distancias r_{kj} oscilen de tal forma que

$$\liminf r_{kj} = 0 \quad \text{y} \quad \limsup r_{kj} > 0, \tag{1.19}$$

mientras que $\delta(t) \longrightarrow 0$. Es decir, que $\delta(t)$ puede tender a cero y se puede deber a una singularidad sin colisión. Painlevé las llamó *pseudocolisiones*. Para el caso $N = 3$, Painlevé en 1897 [32] obtuvo el siguiente resultado.

Teorema 1.3. *(**Painlevé** [32]). En el problema de los 3-cuerpos, todas las singularidades se deben a colisión.*

Observación 1.1. *El problema de determinar si existían pseudocolisiones para $N \geq 4$ estuvo sin respuesta hasta 1989 cuando Z. Xia [44] demostró la existencia de singularidades sin colisión para $N = 5$.*

En 1908 Von Zeipel da un paso importante en la caracterización de las singularidades del problema de los N-cuerpos al demostrar el siguiente resultado

Teorema 1.4. *(**Von Zeipel** [42]). Si alguna de las partículas no tiende a una posición límite finita cuando $t \to t_*$, entonces necesariamente*

$$\lim_{t \to t_*} \mathcal{R}(t) = \infty.$$

R. McGehee [22] en 1986 demostró en un lenguaje más actual que para N arbitrario el Teorema de Von Zeipel y el Teorema 1.5 enunciado a continuación son equivalentes. Sundman en 1908 [40] lo demostró para $N = 3$ en el caso Newtoniano.

Teorema 1.5. *Sea $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ una solución del problema de N-cuerpos con potencial Newtoniano definida en un intervalo $[t_*, t)$ donde t_* es una singularidad y tal que $\lim_{t \to t_*} I(\boldsymbol{r}(t)) < \infty$, entonces la singularidad es debida a colisión.*

Este resultado nos indica que cuando una singularidad es debida a una colisión, las soluciones permanecen acotadas y la única forma de tener pseudocolisiones es que el sistema "explote"al infinito en tiempo finito. El resultado anterior fue demostrado por Von Zeipel [42].

1.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

En esta sección estudiaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio la cual suele caracterizarse en el sentido de Lyapunov, un matemático e ingeniero ruso que sentó las bases de la teoría que ahora lleva su nombre.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

1.2.1. Sistemas autónomos

Sea el sistema autónomo

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}), \tag{1.20}$$

donde $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación localmente Lipschitz para un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\bar{\boldsymbol{x}} \in D$ es un punto de equilibrio de (1.20), es decir,

$$f(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0.$$

Nuestro objetivo es caracterizar y estudiar la estabilidad de $\bar{\boldsymbol{x}}$. Por conveniencia, las definiciones y teoremas se darán para el caso en que el punto de equilibrio se encuentra en el origen de $\mathbb{R}^n$, es decir, $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$. No hay pérdida de generalidad en hacerlo porque cualquier punto de equilibrio se puede trasladar al origen a través de un cambio de variables adecuado. Suponga $\bar{\boldsymbol{x}} \neq 0$, y considere el cambio de variables $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}$. La derivada de $\boldsymbol{y}$ es dada por

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y} + \bar{\boldsymbol{x}}) = g(\boldsymbol{y}),$$

donde $g(0) = 0$. En la nueva variable $\boldsymbol{y}$, el sistema tiene equilibrio en el origen. Por tanto, sin pérdida de generalidad, supondremos siempre que $f(\boldsymbol{x})$ satisface $f(0) = 0$, y estudiaremos la estabilidad en el origen $\boldsymbol{z} = 0$.

Definición 1.8. *(**Estabilidad en el sentido de Lyapunov [16]**). El punto de equilibrio $\boldsymbol{x} = 0$ de (1.20) es*

- *estable si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

  $$\|\boldsymbol{x}(0)\| < \delta,$$

  entonces la solución con condición inicial $\boldsymbol{x}(0)$ está definida para cada $t \geq 0$ y satisface

  $$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon.$$

- *inestable si no es estable,*

- *asintóticamente estable si es estable y δ se puede elegir tal que*

  $$\|\boldsymbol{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = 0.$$

Para demostrar que el origen es estable, para cualquier valor de ε que se elija, debemos encontrar un valor de δ que dependa de ε, tal que una trayectoria comenzando en una vecindad δ del origen la cual nunca abandonara la vecindad de ε.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Los puntos de equilibrio que no son asintóticamente estables solo pueden ocurrir en puntos de equilibrio no hiperbólicos. Pero la pregunta de si un punto de equilibrio no hiperbólico es estable, asintóticamente estable o inestable es delicado. El siguiente método es debido a Lyapunov (en su tesis doctoral de 1982), el cual es muy útil para responder a esta pregunta. Veamos entonces la siguiente definición.

Definición 1.9. *Sea $\mathcal{V} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable definida en un dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ que contiene el origen. La derivada de $\mathcal{V}$ a lo largo de las trayectorias de* (1.20) *denotada por $\dot{\mathcal{V}}$, está dada por*

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \boldsymbol{x}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \boldsymbol{x}_i} \cdot f_i(\boldsymbol{x}) \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \boldsymbol{x}_2}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \boldsymbol{x}_N}\right] \cdot \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_N(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot f(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{1.21}$$

La derivada de $\mathcal{V}$ a lo largo de las trayectorias del sistema depende de la ecuación del sistema. Por lo tanto, $\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$ será diferente para diferentes sistemas. Si $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ es la solución de (1.20) con condición inicial $t = 0$, entonces

$$\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt}\mathcal{V}(\varphi(t, \boldsymbol{x}))|_t = 0.$$

Por tanto, si $\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$ es negativa, $\mathcal{V}$ decrecerá a lo largo de la solución de (1.20). Enunciamos entonces el teorema de estabilidad de Lyapunov.

Teorema 1.6. *(K. Hassan **[16]**). Sea $\boldsymbol{x} = 0$ un punto de equilibrio de*(1.20) *y $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^N$ un dominio que contiene a $\boldsymbol{x} = 0$. Sea $\mathcal{V} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, tal que*

$$\mathcal{V}(0) = 0 \ \ y \ \ \mathcal{V}(\boldsymbol{x}) > 0 \ \ en \ \ \mathcal{D} - \{0\}, \tag{1.22}$$

$$\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) \leq 0 \ \ en \ \ \mathcal{D}. \tag{1.23}$$

Entonces, $\boldsymbol{x} = 0$ es estable. Además, si

$$\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) < 0 \ \ en \ \ \mathcal{D} - \{0\}, \tag{1.24}$$

entonces, $\boldsymbol{x} = 0$ es asintóticamente estable.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

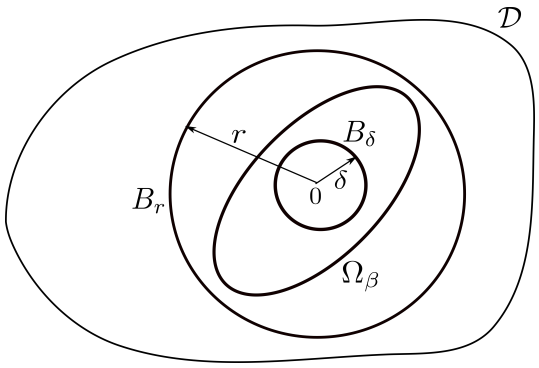


Figura 1.1: Representación geométrica de conjuntos en la demostración del Teorema 1.6.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $r \in (0, \varepsilon]$ tal que

$$B_r = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N : \|\boldsymbol{x}\| \leq r\} \subset \mathcal{D}.$$

Sea $\alpha = \min_{\|x\|=r} \mathcal{V}(\boldsymbol{x})$. Entonces, $\alpha > 0$ por (1.22). Tome $\beta \in (0, \alpha)$, y sea

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r : \mathcal{V}(\boldsymbol{x}) \leq \beta\}.$$

Entonces, Ω_β está en el interior de B_r, ver Figura 1.1. El conjunto Ω_β tiene la propiedad de que cualquier trayectoria que comience en Ω_β en $t = 0$ permanece en Ω_β para todo $t \geq 0$. Esto se sigue de 1.23 ya que

$$\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}(t)) \leq 0 \Rightarrow \mathcal{V}(\boldsymbol{x}(t)) \leq \mathcal{V}(\boldsymbol{x}(0)) \leq \beta, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Dado que Ω_β es un conjunto compacto, concluimos del Teorema 2.4 (ver detalles en [16]) que (1.20) tiene una única solución definida para todo $t \geq 0$ siempre que $\boldsymbol{x}(0) \in \Omega_\beta$. Como $\mathcal{V}(\boldsymbol{x})$ es continua y $\mathcal{V}(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq \delta \Rightarrow \mathcal{V}(\boldsymbol{x}) < \beta.$$

Luego,

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r,$$

y

$$\boldsymbol{x}(0) \in B_\delta \Rightarrow \boldsymbol{x}(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in B_r.$$

Por lo tanto,

$$\|\boldsymbol{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t)\| < r \leq \varepsilon, \quad \forall\ t \geq 0,$$

lo que demuestra que el punto de equilibrio $\boldsymbol{x} = 0$ es estable. Ahora, suponga que (1.24) también se cumple. Para probar la estabilidad asintótica, necesitamos probar

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

que $\boldsymbol{x}(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, para todo $a > 0$, existe $\bar{t} > 0$ tal que $\|\boldsymbol{x}(t)\| < a$, para todo $t > \bar{t}$. De los resultados anteriores, sabemos que para todo $a > 0$, podemos elegir $b > 0$ tal que $\Omega_b \subset B_a$. Por lo tanto, es suficiente mostrar que $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}(t)) \longrightarrow 0$ cuando $t \to \infty$. Dado que $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}(t))$ es monótona creciente y acotada inferiormente por cero,

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{x}(t)) \longrightarrow c \geq 0 \quad \text{cuando } t \to \infty.$$

Demostraremos que $c = 0$ por contradicción. En efecto, suponga que $c > 0$. Por continuidad de $\mathcal{V}(\boldsymbol{x})$, existe $d > 0$ tal que $B_d \subset \Omega_c$. El límite $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}(t)) \longrightarrow c > 0$ implica que la trayectoria $\boldsymbol{x}(t)$ se encuentra fuera de la bola B_d para todo $t \geq 0$. Sea $-\gamma = \text{máx}_{d \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq r} \dot{\mathcal{V}}(x)$, la cual existe porque la función continua $\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$ tiene un máximo sobre el conjunto compacto $\{d \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq r\}$. Por (1.24), $-\gamma < 0$. Se sigue que

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{x}(t)) = \mathcal{V}(x(0)) + \int_0^t \dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}(s))ds \leq \mathcal{V}(\boldsymbol{x}(0)) - \gamma t.$$

Dado que el lado derecho de la ecuación anterior será negativa, la desigualdad contradice el hecho de que $c > 0$. ■

Una función continuamente diferenciable $\mathcal{V}(\boldsymbol{x})$ que satisface (1.22) y (1.23) se llama función de Lyapunov. La superficie $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}) = c$, para algún c, se denomina superficie de Lyapunov, la Figura 1.2 aclara intuitivamente el teorema. Muestra superficies de Lyapunov para valores decrecientes de c. La condición $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$ implica que cuando una trayectoria cruza una superficie de Lyapunov $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}) = c$, se mueve dentro del conjunto $\Omega_c = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N : \mathcal{V}(\boldsymbol{x}) \leq c\}$ y nunca puede volver a salir. Cuando $\dot{\mathcal{V}} < 0$, la trayectoria se mueve desde una superficie de Lyapunov a una superficie de Lyapunov interior con una c más pequeña. A medida de que c disminuye, la superficie de Lyapunov $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}) = c$ se contrae hasta el origen, lo que demuestra que la trayectoria se acerca al origen a medida que avanza el tiempo. Si solo sabemos que $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$, no podemos estar seguros de que la trayectoria se acercará al origen, pero podemos concluir que el origen es estable ya que la trayectoria puede estar dentro de cualquier bola B_c, al requerir que la condición inicial $\boldsymbol{x}(0)$ se encuentre dentro de una superficie de Lyapunov contendida en esa bola.

Definición 1.10. *Una función $\mathcal{V}(\boldsymbol{x})$ que satisface (1.22) se llama*

1. *Definida positiva si $\mathcal{V}(0) = 0$ y $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}) > 0$ para $\boldsymbol{x} \neq 0$.*
2. *Semidefinida positiva si $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}) \geq 0$ para $x \neq 0$.*
3. *Definida o semidefinida negativa si $-\mathcal{V}(\boldsymbol{x})$ es definida positiva o semidefinida positiva respectivamente.*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

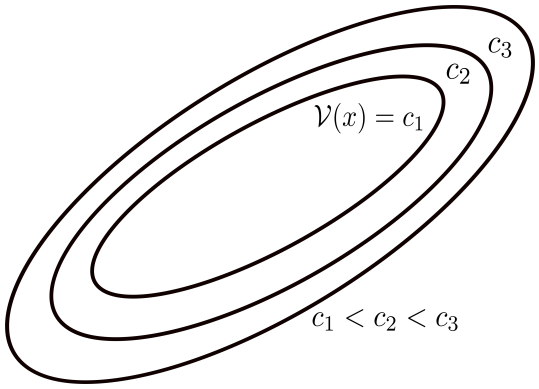


Figura 1.2: Superficies de nivel de una función de Lyapunov.

Si $\mathcal{V}(\boldsymbol{x})$ no tiene un signo definido según uno de estos cuatro casos, se dice que es indefinido.

Con esta terminología podemos reformular el Teorema de Lyapunov para decir que

Teorema 1.7. *(K. Hassan **[16]**). El origen es estable si hay una función definida positiva continuamente diferenciable $\mathcal{V}(\boldsymbol{x})$ de modo que $\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$ es semidefinida negativa, y es asintóticamente estable si $\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$ es definida negativa.*

Teorema 1.8. *Sea $\boldsymbol{x} = 0$ un punto de equilibrio de*(1.20)*. Sea $\mathcal{V} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que satisface las siguientes condiciones*

i)
$$\mathcal{V}(0) = 0 \;\; y \;\; \mathcal{V}(\boldsymbol{x}) > 0, \;\; \forall \;\; \boldsymbol{x} \neq 0, \tag{1.25}$$

ii)
$$\|\boldsymbol{x}\| \longrightarrow \infty \Rightarrow \mathcal{V}(\boldsymbol{x}) \longrightarrow \infty, \tag{1.26}$$

iii)
$$\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) < 0, \;\; \forall \boldsymbol{x} \neq 0, \tag{1.27}$$

entonces, $x = 0$ es estable en el sentido de Lyapunov.

Demostración. Ver [16], [35]. ■

Teorema 1.9. *Sea $\boldsymbol{x} = 0$ un punto de equilibrio para* (1.20)*. Sea $\mathcal{V} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\mathcal{V}(0) = 0$ y $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}_0) > 0$ para algún $\boldsymbol{x}_0$ con $\|\boldsymbol{x}_0\|$ arbitrariamente pequeño. Defina un conjunto*

$$\mathcal{U} := \{\boldsymbol{x} \in B_r : \mathcal{V}(\boldsymbol{x}) > 0\},$$

y suponga que $\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) > 0$ en $\mathcal{U}$. Entonces, $\boldsymbol{x} = 0$ es inestable en el sentido de Lyapunov.

Demostración. Ver [16], [35]. ■

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

1.3. Sistemas lineales y linealización

El sistema lineal

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \tag{1.28}$$

tienen un punto de equilibrio en el origen. El punto de equilibrio está aislado, si y solo si, $\det(A) \neq 0$. Si $\det(A) = 0$, la matriz A tiene un espacio nulo no trivial. Cada punto en el espacio nulo de A es un punto de equilibrio para el sistema (1.28). En otras palabras, si $\det(A) = 0$, el sistema tiene un subespacio de equilibrio. Observe que un sistema lineal no puede tener múltiples puntos de equilibrio aislados. Pues si, $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son dos puntos de equilibrio para (1.28), entonces, por linealidad, cada punto en la linea que conecta $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ es un punto de equilibrio para el sistema. Las propiedades de estabilidad del origen se pueden caracterizar por las ubicaciones de los valores propios de la matriz A. Recuerde de la teoría de sistemas lineales que la solución de (1.28) para una condición inicial dada $\boldsymbol{x}(0)$ está dada por

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp(At)\boldsymbol{x}(0), \tag{1.29}$$

y que para cualquier matriz A existe una matriz P no singular (posiblemente compleja) que transforma A en su forma de Jordan, esto es,

$$P^{-1}AP = J = \text{bloque diagonal}[J_1, J_2, \ldots, J_r],$$

donde J_i es el bloque de Jordan asociado con el valor propio λ_i de A. Un bloque de Jordan de orden m toma la siguiente forma

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\exp(At) = P\exp(Jt)P^{-1} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} t^{k-1}\exp(\lambda_i t)R_{ik}, \tag{1.30}$$

donde n_i es el orden del bloque de Jordan asociado con el valor propio λ_i. El siguiente teorema caracteriza las propiedades de estabilidad del origen.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Teorema 1.10. *El punto de equilibrio* $\boldsymbol{x} = 0$ *de* (1.28) *es estable, si y solo si, todos los valores propios de* A *satisfacen* $Re(\lambda_i) \leq 0$ *y todo valor propio con* $Re(\lambda_i) = 0$ *tiene asociado un bloque de Jordan de orden uno. El punto de equilibrio* $\boldsymbol{x} = 0$ *es (globalmente) asintóticamente estable, si y solo si, todos los valores propios de* A *satisfacen* $Re(\lambda_i) < 0$.

Demostración. De (1.29) tenemos que el origen es estable, si y solo si, $\exp(At)$ es una función acotada de t para todo $t \geq 0$. Si uno de los valores propios de A se encuentra en el semiplano complejo abierto por la derecha, el término exponencial correspondiente $\exp(\lambda_i t)$ en (1.30) crecerá infinitamente cuando $t \to \infty$. Por lo tanto, debemos restringir los valores propios para que estén en el semiplano complejo cerrado a la izquierda. Sin embargo, esos valores propios en el eje imaginario (si los hay) podrían dar lugar a términos ilimitados si el orden del bloque de Jordan asociado es mayor que uno, debido al término t^{k-1} en (1.30). Por lo tanto, debemos restringir los valores propios en el eje imaginario para obtener bloques de Jordan de orden 1. Así, concluimos que la condición para la estabilidad es necesaria. Esta claro que la condición también es suficiente para asegurar que $\exp(At)$ está acotada. Para la estabilidad asintótica del origen, $\exp(At)$ también debe aproximarse a 0. De (1.30), este es el caso, si y solo si, $Re(\lambda_i) < 0$, para todo i. Dado que $\boldsymbol{x}(t)$ depende linealmente de la condición inicial $\boldsymbol{x}(0)$, la estabilidad asintótica del origen es global. ■

La prueba muestra, matemáticamente, por qué los valores propios en el eje imaginario deben tener bloques de Jordan de orden uno para garantizar la estabilidad.

Definición 1.11. *(**Estabilidad espectral**). Si todos los valores propios de la matriz* A *son imaginarios puros, es decir, si* $Re(\lambda_i) = 0$, *entonces el equilibrio* $\boldsymbol{x} = 0$ *se dice espectralmente estable.*

Definición 1.12. *(**Matriz de estabilidad**). Una matriz* A *se dice de estabilidad o de Hurwitz, si todos sus valores propios satisfacen que* $Re(\lambda_i) < 0$

El origen de (1.28) es asintóticamente estable, si y solo si, A es una matriz de estabilidad. La estabilidad asintótica del origen también se puede analizar utilizando el método de Lyapunov. Considere un candidato a función cuadrática de Lyapunov

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\bar{T}} P \boldsymbol{x},$$

donde P es una matriz definida positiva simétrica real. La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema lineal (1.28) viene dada por

$$\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\bar{T}} P \dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}}^{\bar{T}} P x = \boldsymbol{x}^{\bar{T}} (PA + A^{\bar{T}} P) \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^{\bar{T}} \mathcal{Q} \boldsymbol{x},$$

donde $\mathcal{Q}$ es una matriz simétrica definida por

$$PA + A^{\bar{T}} P = -\mathcal{Q}. \tag{1.31}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Si $\mathcal{Q}$ es definida positiva, podemos concluir por el Teorema 1.6 que el origen es asintóticamente estable, es decir, $Re(\lambda_i) < 0$ para todos los valores propios de A. Aquí seguimos el procedimiento habitual del método de Lyapunov, donde elegimos que $V(\boldsymbol{x})$ sea definida positiva y luego verificamos la definición la definición negativa de $\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$. En el caso de los sistemas lineales, podemos invertir el orden de estos dos pasos. La ecuación (1.31) se llama ecuación de Lyapunov. El teorema a continuación prueba la existencia de una matriz P tal que satisface (1.31) y además si A es una matriz simétrica, es su única solución (ver [16], [35]).

Teorema 1.11. *Una matriz A es una matriz de estabilidad, es decir, $Re(\lambda_i) < 0$ para todos los valores propios de A, si y solo si, para cualquier matriz simétrica definida positiva $\mathcal{Q}$ dada existe una matriz simétrica definida positiva P que satisface la ecuación de Lyapunov* (1.31)*. Además, si A es una matriz de estabilidad, entonces P es la única solución de* (1.31)*.*

Demostración. Ver [16], [35]. ■

La ecuación de Lyapunov se puede utilizar para probar que si una matriz es o no una matriz de estabilidad, como alternativa al cálculo de los valores propios de A. Se empieza eligiendo una matriz definida positiva $\mathcal{Q}$ (por ejemplo, $\mathcal{Q} = I$) y se resuelve la ecuación de Lyapunov (1.31) para P. Si la ecuación tiene una solución definida positiva, concluimos que A es una matriz de estabilidad; de lo contrario, no es así. Sin embargo, no hay ninguna ventaja computacional al resolver la ecuación de Lyapunov sobre el cálculo de los valores propios de A. Además, los valores propios proporcionan información más directa sobre la respuesta del sistema lineal. El interés de la ecuación de Lyapunov no está en su uso como prueba de estabilidad para sistemas lineales; más bien, está en el hecho de que proporciona un procedimiento para encontrar una función de Lyapunov para cualquier sistema lineal (1.28) cuando A es una matriz de estabilidad.

Teorema 1.12. ***(Método de Lyapunov [16])****. Sea $\boldsymbol{x} = 0$ un punto de equilibrio para el sistema no lineal* (1.20) *donde $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es continuamente diferenciable y $\mathcal{D}$ es una vecindad del origen. Sea*

$$A = Df(0),$$

entonces el origen es inestable si $Re(\lambda_i) > 0$ para uno o más valores propios de A.

Demostración. Consideremos el caso donde A no tiene valores propios en el eje imaginario. Si los valores propios de A se agrupan en un grupo de valores propios en el semiplano derecho abierto y un grupo de valores propios en el semiplano izquierdo abierto, entonces existe una matriz $\mathcal{B}$ no singular tal que

$$\mathcal{B}A\mathcal{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

donde A_1 y A_2 son matrices de estabilidad definidas en 1.12. Sea

$$\boldsymbol{z} = \mathcal{B}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix},$$

donde la partición de $\boldsymbol{z}$ es compatible con las dimensiones de A_1 y A_2. El cambio de variables $\boldsymbol{z} = \mathcal{B}\boldsymbol{x}$ transforma el sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + g(\boldsymbol{x}),$$

en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}_1 &= -A_1\boldsymbol{z}_1 + g_1(\boldsymbol{z}), \\ \dot{\boldsymbol{z}}_2 &= A_2\boldsymbol{z}_2 + g_2(\boldsymbol{z}), \end{aligned}$$

donde las funciones $g_i(\boldsymbol{z})$ tienen la propiedad que para cualquier $\gamma > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$\|g_i(\boldsymbol{z})\|_2 < \gamma\|\boldsymbol{z}\|_2, \quad \forall \ \|\boldsymbol{z}\|_2 \leq r, \quad i = 1, 2$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma euclidiana.

El origen $\boldsymbol{z} = 0$ es un punto de equilibrio para el sistema en las $\boldsymbol{z}$-coordenadas. Claramente, cualquier conclusión a la que lleguemos con respecto a las propiedades de estabilidad de $\boldsymbol{z} = 0$ se traslada al punto de equilibrio $\boldsymbol{x} = 0$ en las $\boldsymbol{x}$-coordenadas, ya que $\mathcal{B}$ es no singular. Para demostrar que el origen es inestable, aplicamos el Teorema 1.9 y construiremos una función $\mathcal{V}(\boldsymbol{z})$. En efecto, sean $\mathcal{Q}_1$ y $\mathcal{Q}_2$ matrices simétricas definidas positivas de las dimensiones de A_1 y A_2, respectivamente. Dado que A_1 y A_2 son matrices de estabilidad, sabemos por el Teorema 1.11 que las ecuaciones de Lyapunov

$$P_iA_i + A_i^{\bar{T}}P_i = -\mathcal{Q}_i, \quad i = 1, 2$$

tienen soluciones definidas positivas únicas P_1 y P_2. Sea

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}_1^{\bar{T}}P_1\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2^{\bar{T}}P_2\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}^{\bar{T}}\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}.$$

En el subespacio $\boldsymbol{z}_2 = 0$, $\mathcal{V}(\boldsymbol{z}) > 0$ en puntos arbitrariamente cercanos al origen. Sea

$$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^N : \|\boldsymbol{z}\|_2 \leq r \ \text{ y } \ \mathcal{V}(\boldsymbol{z}) > 0\}.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

En $\mathcal{U}$,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{z}) &= -\boldsymbol{z}_1^{\bar{T}}(P_1A_1 + A_1^{\bar{T}}P_1)\boldsymbol{z}_1 + 2\boldsymbol{z}_1^{\bar{T}}P_1g_1(\boldsymbol{z}) \\ &\quad - \boldsymbol{z}_2^{\bar{T}}(P_2A_2 + A_2^{\bar{T}}P_2)\boldsymbol{z}_2 + 2\boldsymbol{z}_2^{\bar{T}}P_2g_2(\boldsymbol{z}) \\ &= \boldsymbol{z}_1^{\bar{T}}\mathcal{Q}_1\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2^{\bar{T}}\mathcal{Q}_2\boldsymbol{z}_2 + 2\boldsymbol{z}^{\bar{T}}\begin{bmatrix} P_1g_1(\boldsymbol{z}) \\ -P_2g_2(\boldsymbol{z})\end{bmatrix} \\ &\geq \lambda_{\text{mín}}(\mathcal{Q}_1)\|\boldsymbol{z}_1\|_2^2 + \lambda_{\text{mín}}(\mathcal{Q}_2)\|\boldsymbol{z}_2\|_2^2 \\ &\quad -2\|\boldsymbol{z}\|_2\sqrt{\|P_1\|_2^2\|g_1(\boldsymbol{z})\|_2^2 + \|P_2\|_2^2\|g_2(\boldsymbol{z})\|_2^2} \\ &> (\alpha - 2\sqrt{2}\beta\gamma)\|\boldsymbol{z}\|_2^2,\end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \text{mín}\{\lambda_{\text{mín}}(\mathcal{Q}_1), \lambda_{\text{mín}}(\mathcal{Q}_2)\}, \quad \beta = \text{máx}\{\|P_1\|_2, \|P_2\|_2\}.$$

Entonces, eligiendo $\gamma < \alpha/2\sqrt{2}\beta$ asegura que $\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{z}) > 0$ en $\mathcal{U}$. Por lo tanto, por el Teorema 1.9 el origen es inestable.

Para la demostración del caso general, es decir, cuando A puede tener valores propios en el eje imaginario, ver [16] y [35]. ■

El Teorema 1.12 nos proporciona un procedimiento simple para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio en el origen. Calculamos la matriz Jacobiana

$$A = Df(0),$$

y analizamos sus valores propios. Si $Re(\lambda_i) > 0$ para algún i, concluimos que el origen es inestable.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 2

Singularidades en el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo

Este capítulo está dedicado a estudiar soluciones que a lo largo del tiempo sufren o experimentan una colisión total entre todas sus partículas en el caso de potenciales casi-homogéneos. Además, al igual que en el Capítulo 1 se definieran y demostraran una serie de resultados para el caso Newtoniano tales como, integrales primeras, singularidades, colisión total, la identidad de Lagrange-Jacobi, la desigualdad de Sundman, el Teorema de Sundman para la colisión total [40], el Teorema de Painlevé [32] y el Teorema equivalente de Von Zeipel propuesto por McGehee [22]. En este capítulo se demostrarán estos mismos resultados ahora para el caso casi-homogéneo.

Recalcamos que todas las integrales primeras para el caso Newtoniano de los N-cuerpos también son válidas para el caso casi-homogéneo.

2.1. Problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo

Otro tipo de problema que se deriva del problema de N-cuerpos es el llamado problema de N-cuerpos con potencial tipo Manev, este fue considerado por Florin Diacu [10] (1993). Samantha Kirk, Ioannis Haranas and Ioannis Gkigkitzis [19] (2013) señalan que "el potencial tipo Manev es una alternativa al potencial Newtoniano que tiene una amplia variedad de aplicaciones, en Astronomía, Astrofísica, dinámica espacial, Física clásica, Mecánica e incluso física atómica". En Astrofísica por ejemplo sirve para analizar el comportamiento de las fugas al infinito (ver detalles en [14]).

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

2.1.1. Formulación del problema

De las ecuaciones del problema de N-cuerpos con potencial tipo Manev (7), tenemos el llamado problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo cuyas ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{j=1,j\neq k}^{N}\left[\frac{m_k m_j(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j\|^3}+\frac{pm_k m_j C_{kj}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j\|^{p+2}}\right]=\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{r}_k}, \tag{2.1}$$

para cada $k=1,\ldots,N$ con potencial de la forma $W=U+V$, donde

$$U=\sum_{1\leq k<j\leq N}\frac{m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j\|}, \tag{2.2}$$

y

$$V=\sum_{1\leq k<j\leq N}\frac{m_k m_j C_{kj}}{\|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j\|^p}. \tag{2.3}$$

Aquí, $C_{kj}=C_{jk}$ son constantes en $\mathbb{R}$ para cada $k,j=1,\ldots,N$ y $m_k>0$ para cada $k=1,\ldots,N$.

El problema de N-cuerpos que vamos a estudiar en este capítulo viene dado por potenciales de la forma (2.2) y (2.3). El potencial W es llamado casi-homogéneo por ser la suma de funciones homogéneas de diferentes grados, U es el potencial Newtoniano de grado -1 y V es el potencial homogéneo de grado $-p$ con $p>1$. La aplicabilidad del problema casi-homogéneo de N-cuerpos va desde la Mecánica celeste y la Física atómica hasta la Química y la Cristalografia (ver [43], [11], [1], [2]). Entre los casos particulares tenemos el caso en el cual $p=3$ llamado problema **oblato/prolato** (ver detalles en [6]).

2.2. Estudio de la colisión total en el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo

En la presente sección estudiaremos las propiedades de una solución que sufre una colisión total de partículas, es decir, todas las partículas ocupan una misma posición en el espacio de configuraciones. Extenderemos las definiciones dadas en el Capítulo 1 y además como se menciona en el preámbulo de este capítulo adaptaremos los resultados del caso Newtoniano de los N-cuerpos al problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

2.2.1. Colisión total

Lema 2.1. *(**Identidad de Lagrange-Jacobi para el caso casi-homogéneo**). A lo largo de una solución $\boldsymbol{r}(t)$ del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo, se verifica que*

$$\ddot{I} = U + (2-p)V + 2h. \tag{2.4}$$

Demostración. En efecto, sabemos que

$$I(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \|\boldsymbol{r}_k(t)\|^2, \tag{2.5}$$

y dados U y V funciones homogéneas de grado -1 y $-p$, respectivamente, se tiene del Teorema de Euler 4.12 dada en el Apéndice que

$$-U(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^T \nabla U(\boldsymbol{r}) \quad \text{y} \quad -pV(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^T \nabla V(\boldsymbol{r}). \tag{2.6}$$

Por otro lado, derivando en I se tiene

$$\dot{I}(\boldsymbol{r}(t)) = \sum_{k=1}^{N} m_k \|\boldsymbol{r}_k(t)\| \|\dot{\boldsymbol{r}}_k(t)\|, \tag{2.7}$$

y sabiendo que $\|\boldsymbol{r}_k(t)\|^2 = \boldsymbol{r}_k(t)\cdot\boldsymbol{r}_k(t)$ entonces, $2\|\boldsymbol{r}_k(t)\|\|\dot{\boldsymbol{r}}_k(t)\| = 2\boldsymbol{r}_k(t)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_k(t)$. Luego, sustituyendo la relación anterior en (2.7) tenemos

$$\dot{I}(\boldsymbol{r}(t)) = \sum_{k=1}^{N} m_k(\boldsymbol{r}_k(t)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_k(t)), \tag{2.8}$$

y nuevamente derivando esta expresión obtenemos

$$\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) = \sum_{k=1}^{N} m_k \|\dot{\boldsymbol{r}}_k(t)\|^2 + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k(t) m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k(t). \tag{2.9}$$

De las ecuaciones (2.6) y puesto que

$$m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k(t) = \nabla_{\boldsymbol{r}_k} W, \tag{2.10}$$

la ecuación (2.9) queda de la siguiente manera

$$\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) = 2T(\dot{\boldsymbol{r}}_k(t)) - U(\boldsymbol{r}(t)) - pV(\boldsymbol{r}(t)), \tag{2.11}$$

o bien,

$$\ddot{I} = 2T - U - pV.$$

Luego, como $T = U + V + h$ se sigue que $\ddot{I} = U + (2-p)V + 2h$. ■

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Teorema 2.1. *Sea $\boldsymbol{r}(t) = (\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t))$ una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo que sufre colisión total en $t = t_*$. Si $p = 2$ y $C_{kj} \in \mathbb{R}$, para cada $k, j = 1, \ldots, N$, entonces t_* es finito. Además, si $p > 2$ y $sgn(C_{kj})$ es el mismo para cada $k, j = 1, \ldots, N$, entonces t_* es finito.*

Demostración. En efecto, siendo el potencial casi-homogéneo W a lo largo de una solución $\boldsymbol{r}(t)$ igual a

$$W(t) = W(\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t)) = \sum_{1 \le k < j \le N} \left[\frac{m_k m_j}{r_{kj}(t)} + \frac{m_k m_j C_{kj}}{[r_{kj}(t)]^p} \right],$$

Utilizando la identidad dada en el Lema 2.1 tenemos

$$\ddot{I} = U + (2 - p)V + 2h, \tag{2.12}$$

donde h es la constante de energía.

Escribamos (2.4) como

$$\ddot{I} = \sum_{1 \le k < j \le N} \frac{m_k m_j}{r_{kj}^p(t)} \left(r_{kj}^{p-1}(t) + (2 - p)C_{kj} \right) + 2h. \tag{2.13}$$

Supongamos que la colisión total ocurre en un tiempo infinito. Vamos a separar el estudio en 3 casos.

- **Caso 1:** Sea $p = 2$ y $C_{kj} \in \mathbb{R}$. Si $t_* = +\infty$ notamos que si $r_{kj}(t) \to 0^+$ para todo k, j, entonces se cumple

$$\ddot{I} = \sum_{1 \le k < j \le N} \frac{m_k m_j}{r_{kj}(t)} \longrightarrow +\infty, \text{ cuando } t \to +\infty. \tag{2.14}$$

- **Caso 2:** Sea $p > 2$, se tiene que $(2 - p) < 0$, así asumiendo $C_{kj} < 0$ y notando que $r_{kj}(t) \to 0^+$ para todo k, j se cumple $\ddot{I} \longrightarrow +\infty$ cuando $t \to \infty$.

  Así, dado $\varepsilon > 0$, existe t_0 tal que $\ddot{I}(t) > \varepsilon$ para todo $t \ge t_0$. En particular, tomando $\varepsilon = 2$ e integrando dos veces con respecto a t tenemos

$$I > t^2 + At + B,$$

  donde A y B son constantes. Pero esto contradice el hecho que $I \longrightarrow 0^+$ cuando $t \to t_*$. Por lo tanto, t_* es finito.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

- **Caso 3:** Si $p > 2$, se tiene que $(2-p) < 0$, así asumiendo $C_{kj} > 0$ y notando que $r_{kj}(t) \to 0^+$ para todo k, j se cumple $\ddot{I} \longrightarrow -\infty$ cuando $t \to t_*$.

  Análogamente a los casos anteriores tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe t_0 tal que $\ddot{I} < -\varepsilon$ para todo $t \geq t_0$. En particular, tomando $\varepsilon = 2$ e integrando dos veces respecto a t tenemos

  $$I < -t^2 + At + B.$$

  Pero esto contradice el hecho que $I \longrightarrow 0^+$ cuando $t \to t_*$. Por lo tanto, t_* es finito.

Así, de los casos anteriores se concluye la demostración. ■

En lo que sigue vamos a suponer que $C_{kj} \neq 0$ para cada $k = 1, \ldots, N$, ya que si $C_{kj} = 0$ recaemos en el caso Newtoniano el cual ya ha sido estudiado en el capítulo anterior. Además, se tiene que los teoremas y proposiciones a continuación son válidos en el caso Newtoniano.

El teorema a continuación muestra la relación entre la colisión total de partículas y el momento angular.

Teorema 2.2. *(**Sundman para el caso casi-homogéneo**). Sea $\boldsymbol{r}(t) = (\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t))$ una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo que sufre una colisión total en $t = t_*$, entonces si $p \geq 2$ y $C_{kj} < 0$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$ se tiene $\mathcal{C} = 0$.*

Demostración. En efecto, suponga que $I \longrightarrow 0$ cuando $t \to t_*$ y $r_{kj} \longrightarrow 0$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$. Por la identidad de Lagrange-Jacobi vista en (2.1)

$$\ddot{I} = \sum_{1 \leq k < j \leq N} \frac{m_k m_j}{r_{kj}^p} \left(r_{kj}^{p-1} + (2-p) C_{kj} \right) + 2h,$$

y como $p \geq 2$ y $C_{kj} < 0$ tenemos que $\ddot{I} \longrightarrow +\infty$ cuando $t \longrightarrow t_*$. En particular $\ddot{I} > 0$ para un cierto intervalo $(\widetilde{t}, t_*)$. Usando el Lema 4.2 del Apéndice, observamos que $\dot{I} < 0$ para $t \in (\widetilde{t}, t_*)$. De (1.11) sabemos

$$\mathcal{C} = \sum_{k=1}^{N} m_k (\boldsymbol{r}_k \times \dot{\boldsymbol{r}}_k),$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

entonces, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\|\mathcal{C}\| = \left\| \sum_{k=1}^{N} m_k(\boldsymbol{r}_k \times \dot{\boldsymbol{r}}_k) \right\| \leq \sum_{k=1}^{N} m_k \|\boldsymbol{r}_k\| \|\dot{\boldsymbol{r}}_k\| = \sum_{k=1}^{N} (\sqrt{m_k}\|\boldsymbol{r}_k\|) \sum_{k=1}^{N} (\sqrt{m_k}\|\dot{\boldsymbol{r}}_k\|). \tag{2.15}$$

Así,

$$\|\mathcal{C}\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \|\boldsymbol{r}_k\|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \|\dot{\boldsymbol{r}}_k\|^2 \right) = 4IT. \tag{2.16}$$

Nuevamente usando la identidad en (2.1) obtenemos que

$$\ddot{I} = 2T - U - pV, \tag{2.17}$$

además como $h = T - U - V$, entonces $-U = h - T + V$. Reemplazando esta igualdad en (2.17) tenemos

$$\ddot{I} = T + h + (1-p)V,$$

y despejando T se sigue que

$$T = \ddot{I} - h + (p-1)V.$$

Entonces, como $p \geq 2$ y $C_{kj} < 0$ se sigue de la igualdad anterior que $(p-1)V < 0$ y luego,

$$T = \ddot{I} - h + (p-1) \sum_{1 \leq k < j \leq N} \frac{C_{kj} m_k m_j}{r_{kj}^p} < \ddot{I} - h. \tag{2.18}$$

Ahora, sustituimos (2.18) en (2.16) obteniendo

$$\|\mathcal{C}\|^2 \leq 4I(\ddot{I} - h).$$

Sabemos por Lema 4.2 del Apéndice que si $\ddot{I} > 0$, entonces $\dot{I} < 0$. Multiplicando la desigualdad anterior por $-\dfrac{\dot{I}}{4I} > 0$ se tiene que

$$-\|\mathcal{C}\|^2 \frac{\dot{I}}{4I} \leq 4I \left(-\frac{\dot{I}}{4I} \right) (\ddot{I} - h) \leq -\dot{I}\ddot{I} + \dot{I}h,$$

de donde,

$$-\frac{\|\mathcal{C}\|^2}{4} \dot{I} I^{-1} \leq h\dot{I} - \ddot{I}\dot{I}.$$

Integrando la desigualdad anterior entre $\tilde{t}$ y t se sigue

$$\frac{\|\mathcal{C}\|^2}{4} \log \frac{I(\tilde{t})}{I(t)} \leq h(I(t) - I(\tilde{t})) - \frac{1}{2}\dot{I}^2(t) + \frac{1}{2}\dot{I}^2(\tilde{t}),$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

luego,

$$\|\mathcal{C}\|^2 \log\left(\frac{1}{I(t)}\right) \leq 4[hI(t) - \frac{1}{2}\dot{I}^2(t) + K] \leq 4[hI(t) + K].$$

donde $K = \frac{1}{2}\dot{I}^2(\tilde{t}) - hI(\tilde{t}) - \frac{\|\mathcal{C}\|^2}{4}\log I(\tilde{t})$.

Así, tenemos

$$\|\mathcal{C}\|^2 \leq \frac{4[hI(t) + K]}{\log\left(\frac{1}{I(t)}\right)}. \tag{2.19}$$

Como $I \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow t_*$, entonces para $t \longrightarrow t_*$ el lado derecho de la ecuación (2.19) tiende a $+\infty$. Luego, $\|\mathcal{C}\|^2 = 0$ y en consecuencia, $\mathcal{C} = 0$. ■

2.3. Singularidades y colisión en el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo

Recordemos que las ecuaciones de primer orden del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_k &= \tfrac{1}{m_k}\boldsymbol{p}_k \\ \dot{\boldsymbol{p}}_k &= \nabla_{\boldsymbol{r}_k} W, \quad k = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{2.20}$$

son reversibles. Podemos considerar la solución $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ definida en $[0, t^+)$ o $(t^-, 0]$.

Lema 2.2. *Dado $C_{kj} \in \mathbb{R}$ para cada k, j y todo $p \in \mathbb{R}$. Sea $\boldsymbol{r}(t)$ una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo* (2.20)*, se verifica que, si $r_{kj}(t) \geq \beta$, entonces $\|\ddot{\boldsymbol{r}}_k(t)\| \leq M\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{pC}{\beta^{p+1}}\right)$ donde $C = \max\{|C_{kj}|\}$.*

Demostración. De (2.1) se sabe que

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_k(t) = \sum_{j=1, k\neq j}^{N} m_j \left[\frac{(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{r_{kj}^3} + \frac{pC_{kj}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{r_{kj}^{p+2}}\right],$$

luego,

$$\begin{aligned} \|\ddot{\boldsymbol{r}}_k(t)\| &\leq \sum_{j=1, k\neq j}^{N} m_j \left[\frac{\|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k\|}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^3} + \frac{p|C_{kj}|\|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k\|}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^{p+2}}\right] \\ &\leq \sum_{j=1, k\neq j}^{N} m_j \left[\frac{1}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^2} + \frac{pC}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^{p+1}}\right]. \end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Ahora, como $r_{kj}(t) \geq \beta$, entonces $\dfrac{1}{r_{kj}(t)} \leq \dfrac{1}{\beta}$ y puesto que $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$. Tenemos

$$\|\ddot{\boldsymbol{r}}_k(t)\| \leq \sum_{j=1, k\neq j}^{N} m_j \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{pC}{\beta^{p+1}}\right) = M\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{pC}{\beta^{p+1}}\right).$$

■

Definición 2.1. *Sea $\boldsymbol{r}(t)$ una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo. Dada la función $\rho(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ reescribiremos la ecuación dada en la definición* (1.4) *como $\rho(\boldsymbol{r}(t)) = \text{mín}_{1\leq k<j\leq N} r_{kj}(t)$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$.*

Proposición 2.1. *Dado $p \geq 2$ y $C_{kj} > 0$ para cada k, j. Si $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ es una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo* (2.20) *definida en un intervalo maximal $[0, t_*)$, entonces t_* es una singularidad, si y sólo si,*

$$\lim_{t\to t^*} \text{ínf}\, \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0.$$

Demostración. Sea t_* una singularidad. Suponga por el absurdo que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\lim_{t\to t_*} \text{ínf}\, \rho(\boldsymbol{r}(t)) \geq \alpha.$$

Se sigue por el Lema 4.1 del Apéndice que existe $t_0 \in [0, t_*)$ y $\beta \in (0, \alpha]$, tal que $r_{kj} \geq \beta$ con $t \in [t_0, t_*)$. Luego, por el Lema 2.2 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ es acotada y por ende, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo y a la Proposición 4.3 dada en el Apéndice, existe el límite de $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ cuando t tiende a t_*. Utilizando este mismo principio se tiene que $\dot{\boldsymbol{r}}$ es acotada, por lo tanto, existe el límite de $\boldsymbol{r}(t)$ cuando t tiende a t_*.

Luego, de lo anterior, existe $\boldsymbol{r}^*$ que es el límite de $\boldsymbol{r}(t)$, es decir,

$$\lim_{t\to t_*} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}^*$$

Así, por lo mismo, existe $\boldsymbol{p}^*$ tal que $\lim_{t\to t_*} \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}^*$. De hecho, esto es fácil de ver usando el Lema 2.2, el Teorema Fundamental del Cálculo y la Proposición 4.3 dada en el Apéndice. Esto nos garantiza que existe $r^*_{kj} = \|\boldsymbol{r}^*_k - \boldsymbol{r}^*_j\|$ donde $r^*_{kj}(t) = \lim_{t\to t_*} r_{kj}(t)$ y como $r^*_{kj}(t) \geq \beta$ para $k \neq j$, esto implica que todas las distancias mutuas son positivas.

Por otro lado, observamos que el dominio de definición de $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ depende de β (es decir, de α), pero no de la elección de las condiciones iniciales. Así, eligiendo las condiciones iniciales $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ para t muy próximo de t_* tenemos que la solución es analítica en t_* lo que es una contradicción pues t_* es una singularidad. Luego,

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$\lim_{t\to t_*} \inf \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0.$

A continuación, demostraremos el recíproco. Supongamos que $\lim_{t\to t_*} \inf \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0$, queremos demostrar que t_* es una singularidad. De hecho, si

$$\|\ddot{\boldsymbol{r}}_k(t)\| \leq \sum_{j=1,k\neq j}^{N} \frac{m_j}{r_{kj}^{p+1}(t)} \left(r_{kj}^{p-1}(t) + p|C_{kj}|\right) \longrightarrow +\infty, \ \ \forall \ k = 1, \ldots, N, \tag{2.21}$$

cuando $t \to t_*$, entonces $r_{kj} \to 0^+$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$. Por lo tanto, se sigue que t_* es una singularidad.

Por otro lado, suponga que $\|\ddot{\boldsymbol{r}}_k(t)\|$ es acotada para todo k y todo $t \in [0, t_*)$. Entonces, usando la definición (5) tenemos que

$$\|\ddot{\boldsymbol{r}}_k(t)\| = \|\nabla_{\boldsymbol{r}_k} W(t)\|$$

es acotada a lo largo de una solución. Así, del Teorema Fundamental del Cálculo

$$W(\boldsymbol{r}(t)) = \int_0^s \nabla_{\boldsymbol{r}_k} W(\boldsymbol{r}(t))dt.$$

Desde que la integral de una función acotada es acotada en un intervalo acotado se sigue que W es acotada a lo largo de una solución.

Ahora, si $\lim_{t\to t_*} \inf \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0$, existe $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con t_i tendiendo para t_* tal que $\lim_{t\to t_*} \rho(\boldsymbol{r}(t_i)) = 0$. Pero como $\rho(\boldsymbol{r}(t)) = \text{mín}\{r_{kj}(t)\}$, entonces para algún k, j se sigue que $r_{kj}(t_i)$ tienden para 0^+. Pero por hipótesis, si $p \geq 2$ y $C_{kj} > 0$ tenemos

$$W(\boldsymbol{r}(t_i)) = \sum_{1\leq k<j\leq N} \frac{m_k m_j}{r_{kj}^p}(r_{kj}^{p-1} + C_{kj}) \longrightarrow +\infty.$$

Finalmente, se tiene que

$$\lim_{t\to t_*} W(\boldsymbol{r}(t)) = +\infty,$$

la cual es una contradicción con el hecho de ser W acotada. Por lo tanto, t_* es una singularidad. ■

El siguiente teorema es una adaptación del Teorema de Painlevé [32] para el caso Newtoniano enunciado en Capítulo 1 que a continuación demostramos para el caso casi-homogéneo.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Teorema 2.3. *(**Painlevé para el caso casi-homogéneo**). Dado $p \geq 2$ con $C_{kj} > 0$ para cada k, j. Si $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ es una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo (2.20) definida en un intervalo maximal $[0, t_*)$, entonces t_* es una singularidad de la solución, si y sólo si,*

$$\lim_{t \to t_*} \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0.$$

Demostración. Si $\lim_{t\to t_*} \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0$, entonces por definición de $\rho(\boldsymbol{r}(t))$ y propiedad de límite de funciones

$$\lim_{t \to t_*} \text{ínf}\, \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0.$$

Así, usando la Proposición 2.1 tenemos que t_* es una singularidad de la solución.

A continuación, demostraremos el recíproco. Probaremos que si t_* es una singularidad entonces $\lim_{t\to t_*} \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0$. Pero, de la Proposición 2.1 basta demostrar que

$$\lim_{t \to t_*} \sup \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0. \tag{2.22}$$

La demostración la haremos por el absurdo. Supongamos que (2.22) no se cumple, es decir, existe $A > 0$ tal que

$$\lim_{t \to t_*} \sup \rho(\boldsymbol{r}(t)) > A. \tag{2.23}$$

Entonces, se sigue por el Lema 4.3 del Apéndice que existe una sucesión de tiempos $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $t_i \to t_*$, tal que $\lim_{t\to t_*} \rho(\boldsymbol{r}(t_i)) > A$. De la definición en (2.1) sabemos que $\rho(\boldsymbol{r}(t_i)) = \text{mín}_{1\leq k<j\leq N} r_{kj}(t_i)$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$, entonces usando la desigualdad dada en (2.23) tenemos que $r_{kj}(t_i) > A$ para t_i bastante próximo de t_* con $i \to +\infty$.

Ahora, notemos que para $C_{kj} > 0$ y $p \geq 2$ se satisface

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{r}(t_i)) &= \sum_{1\leq k<j\leq N} \frac{m_k m_j}{r_{kj}} \leq \sum_{1\leq k<j\leq N} \frac{m_k m_j}{A}, \\ V(\boldsymbol{r}(t_i)) &= \sum_{1\leq k<j\leq N} \frac{m_k m_j C_{kj}}{r_{kj}^p} \leq \sum_{1\leq k<j\leq N} \frac{m_k m_j C_{kj}}{A^p}, \end{aligned}$$

entonces

$$W(\boldsymbol{r}(t_i)) \leq \sum_{1\leq k<j\leq N} \left[\frac{m_k m_j}{A} + \frac{m_k m_j C_{kj}}{A^p} \right] := B.$$

Así, $W(\boldsymbol{r}(t_i)) \leq B$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Usando la relación de energía dada en (1.8) tenemos que

$$T(\boldsymbol{p}(t_i)) = h + W(\boldsymbol{r}(t_i)) \leq h + B,$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora, como

$$T = \frac{M}{2}\|\dot{\boldsymbol{r}}\|^2 = \frac{M}{2}\left(\frac{\|\boldsymbol{p}\|^2}{M^2}\right) = \frac{1}{2M}\|\boldsymbol{p}\|^2,$$

se tiene

$$T(\boldsymbol{p}(t_i)) = \frac{1}{2M}\|\boldsymbol{p}(t_i)\|^2 \leq h + B.$$

De donde $\|\boldsymbol{p}(t_i)\|^2 \leq 2M(h+B)$, por tanto, $\|\boldsymbol{p}(t_i)\| \leq \sqrt{2M(h+B)}$, es decir, existe $\gamma > 0$ tal que $\|\boldsymbol{p}(t_i)\| \leq \gamma$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Observe que fijando t_i y tomando $(\boldsymbol{r}(t_i), \boldsymbol{p}(t_i))$ como condición inicial, tenemos que la solución $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ está definida y es analítica en el intervalo $(t_i - \delta, t_i + \delta)$, donde δ depende de γ y de A.

Además, por el Teorema de Existencia y Unicidad, observe que también existe n_0 tal que $t_* \in (t_{n_0} - \delta, t_{n_0} + \delta)$. En efecto, como $t_i \to t_*$ dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para $n \geq N$, entonces $|t_i - t_*| < \varepsilon$, tomando $\varepsilon = \delta$ se sigue que $|t_i - t_*| < \delta$.
Por lo tanto, la solución es analítica en t_*, lo que es una contradicción. ■

La siguiente proposición establece que el momento de inercia debe aproximarse a un límite posiblemente infinito cuando $t \longrightarrow t_*$.

Proposición 2.2. *Dado $p \geq 2$ con $C_{kj} > 0$ para cada k, j. Si $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ es una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo* (2.20) *definida en un intervalo $[0, t_*)$ donde t_* es una singularidad, entonces existe $I^* \in [0, +\infty]$ tal que*

$$\lim_{t \to t_*} I(\boldsymbol{r}(t)) = I^*.$$

Demostración. Por hipótesis como t_* es una singularidad, se sigue del Teorema 2.3, que $\lim_{t \to t_*} \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0$.

Luego, por el Lema 4.3 del Apéndice, existe $\{t_i\}$ con $t_i \to t_*$ tal que

$$\lim_{t \to t_*} \rho(\boldsymbol{r}(t_i)) = 0.$$

Pero, de la definición (2.1) sabemos que $\rho(\boldsymbol{r}(t_i)) = \min_{1 \leq k < j \leq N} r_{kj}(t_i)$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$, entonces se sigue que, si $r_{kj}(t) \to 0^+$ y dado que $p \geq 2$ y $C_{kj} > 0$ tenemos

$$W(\boldsymbol{r}(t)) = \sum_{1 \leq k < j \leq N} \frac{m_k m_j}{r_{kj}^p(t)} \left[r_{kj}^{p-1}(t) + C_{kj}\right] \longrightarrow +\infty, \quad \text{cuando } t \to t_*,$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

es decir,

$$\lim_{t\to t_*} W(\boldsymbol{r}(t)) = +\infty.$$

Así, usando la forma extendida de la desigualdad de Legendre-Jacobi dada en (2.4)

$$\ddot{I} = \sum_{1\le k<j\le N} \frac{m_k m_j}{r_{kj}^p(t)} \left[r_{kj}^{p-1}(t) + (2-p)C_{kj}\right] + 2h,$$

de donde si $p \le 2$ y $C_{kj} > 0$ se tiene que $\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) < 0$ para algún $\delta > 0$ y para todo $t \in (t_* - \delta, t_*)$. Por tanto, $\dot{I}(\boldsymbol{r}(t))$ es decreciente en $(t_* - \delta, t^*)$. Esto implica que $I(\boldsymbol{r}(t)) < 0$ y por ende no cambia de signo y además es monótona en $(t_* - \delta, t_*)$.

Finalmente, puesto que $I(\boldsymbol{r}(t))$ es monótona en $(t_* - \delta, t_*)$ se tiene por resultado de Análisis real que existe $I^* \in [0, +\infty]$ tal que

$$\lim_{t\to t_*} I(\boldsymbol{r}(t)) = I^*.$$

■

El teorema que veremos a continuación es una adaptación del Teorema de Von Zeipel [42] 1908 para el caso Newtoniano enunciado en Capítulo 1 que demostramos para el caso casi-homogéneo. Pero primero introduciremos algunas notaciones y definiciones de vital importancia para nuestra demostración.

- $P(A)$: conjunto de partes del conjunto arbitrario A.
- $\Gamma_j \subset \mathcal{J} \equiv \{1, 2, \ldots, N\}$ donde Γ_j es el j-ésimo aglomerado.
- N_j: cardinalidad de Γ_j y la suma de los N_j es igual a N.
- m_j^k: masa de la k-ésima partícula del j-ésimo aglomerado.
- $\boldsymbol{r}_{j,k}$: vector posición desde el origen hasta la partícula m_j^k.
- $\boldsymbol{Z}_j$: vector posición desde el origen al centro de masa del j-ésimo aglomerado Γ_j, es decir,

$$\boldsymbol{Z}_j = \frac{1}{M_j} \sum_{j\in\Gamma_j} m_j^k \boldsymbol{r}_{j,k}, \quad \text{donde} \quad M_j = \sum_{j\in\Gamma_j} m_j^k.$$

Usando esta notación definimos la siguiente aplicación lineal

$$\pi_\Gamma : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}, \text{ tal que } \pi_\Gamma^i \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{Z}_i \quad \text{si } i \in \mathcal{J}. \tag{2.24}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

- $\boldsymbol{z}_{j,k} = \boldsymbol{r}_{j,k} - \boldsymbol{Z}_j$: vector posición desde el centro de masa del j-ésimo aglomerado a la masa m_j^k.
- $(CM)_j$: centro de masa del j-ésimo aglomerado, donde $j \in \Gamma_j$.
- $\Delta_\Gamma = \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \Delta_{\Gamma_i}$: conjunto de las configuraciones donde las partículas en cada aglomerado están en colisión simultánea. Note que Δ_Γ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{3N}$, donde

$$\Delta_{\Gamma_i} := \left\{ \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N} / \prod_{1\le j<k\le N_i} \|\boldsymbol{r}_{i,j} - \boldsymbol{r}_{i,k}\| = 0 \right\}.$$

El siguiente ejemplo en $\mathbb{R}^3$ muestra gráficamente las notaciones más importantes descritas anteriormente.

Ejemplo 2.1. *Consideramos el caso de 2 aglomerados con 2 partículas en cada uno de los aglomerados.*

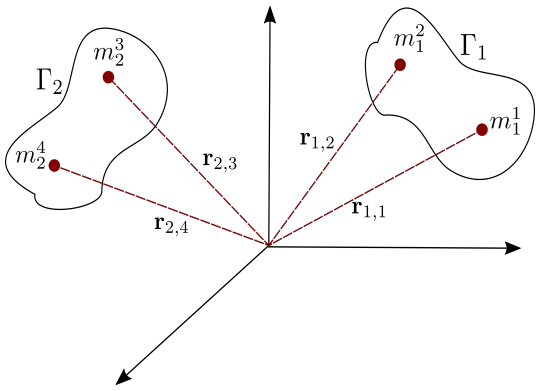


Figura 2.1: Cuatro partículas y dos aglomerados

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

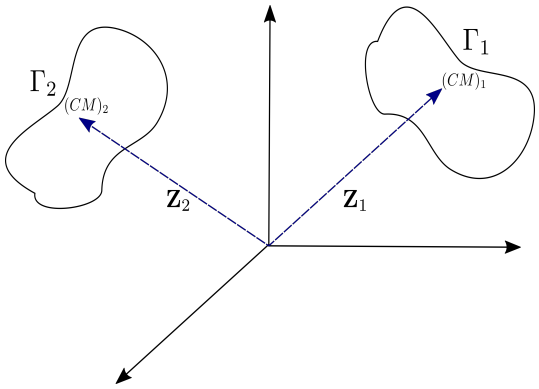


Figura 2.2: Centro de masa de cada aglomerado

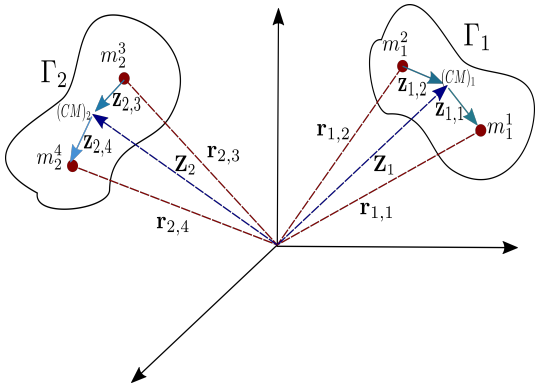


Figura 2.3: Distancia de cada partícula al centro de masa de cada aglomerado.

Un elemento importante en la demostración del Teorema de Von Zeipel es la descomposición del momento de inercia del sistema de partículas en componentes correspondientes a subsistemas. Esta descomposición se comprende mejor en términos de la geometría del espacio $\mathbb{R}^{3N}$ con producto interno

$$\langle \boldsymbol{r}, \widetilde{\boldsymbol{r}} \rangle = \sum_{j \in \mathcal{J}} m_j \boldsymbol{r}_j^t \widetilde{\boldsymbol{r}}_j, \tag{2.25}$$

dado en la Proposición 4.2 del Apéndice. Además, sabemos que $\ker \pi_\Gamma = (Im\pi_\Gamma)^\perp = (\Delta_\Gamma)^\perp$, entonces

$$\mathbb{R}^{3N} = \Delta_\Gamma \oplus (\Delta_\Gamma)^\perp = \Delta_\Gamma \oplus \ker \pi_\Gamma.$$

Denotando por $\pi^\Gamma = \mathrm{id} - \pi_\Gamma$ a la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal de Δ_Γ tenemos que $(\pi^\Gamma(\boldsymbol{r}))_j = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{Z}_i$ donde $j \in \Gamma_i$ y $(\pi^\Gamma(\boldsymbol{r}))_j = \boldsymbol{r}_{i,k} - \boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{z}_{i,k}$. Ahora, si $\pi^\Gamma(\boldsymbol{r}) \in \ker \pi_\Gamma$ se tiene $\pi^\Gamma(\boldsymbol{r}) \in (\Delta_\Gamma)^\perp$. Por lo tanto, π^Γ y π_Γ son ortogonales entre sí, entonces usando el Teorema de Pitágoras en espacios con producto interno

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

tenemos la siguiente relación

$$\|\boldsymbol{r}\|^2 = \|\pi^{\Gamma}(\boldsymbol{r})\|^2 + \|\pi_{\Gamma}(\boldsymbol{r})\|^2, \quad \forall\ \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{3N}. \tag{2.26}$$

Observe que $\|\boldsymbol{r}\|^2 = \sum_{j=1}^{N} m_j \|\boldsymbol{r}_j\|^2$ de donde por la definición de momento de inercia dado en (1.12) se sigue que $I(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{r}\|^2$.

Ahora, definiendo

$$I_{\Gamma}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{J}} M_i \|\boldsymbol{Z}_i\|^2,$$

como el momento de inercia de los baricentros de los aglomerados, y como

$$I_{\Gamma_i}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_i} m_i^j \|\boldsymbol{z}_{i,j}\|^2,$$

el momento de inercia del aglomerado Γ_i en relación a su centro de masa. Definamos

$$I^{\Gamma}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\|\pi^{\Gamma}(\boldsymbol{r})\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{J}} M_i \|\boldsymbol{Z}_i\|^2. \tag{2.27}$$

Teniendo en cuenta que

$$I_{\Gamma}(\boldsymbol{r}) = I(\pi_{\Gamma}(\boldsymbol{r})) = \frac{1}{2}\|\pi_{\Gamma}(\boldsymbol{r})\|^2,$$

entonces, $I^{\Gamma}(\boldsymbol{r}) = I(\pi^{\Gamma}(\boldsymbol{r}))$ por lo que la relación (2.26) corresponde a

$$I(\boldsymbol{r}) = I^{\Gamma}(\boldsymbol{r}) + I_{\Gamma}(\boldsymbol{r}). \tag{2.28}$$

Veamos ahora algunas propiedades del potencial casi-homogéneo relevantes para la demostración del teorema de Von Zeipel. De hecho, podemos descomponer el potencial casi-homogéneo W como sigue

$$W(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} W_{kj}(\boldsymbol{r}), \tag{2.29}$$

de donde

$$W_{kj}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad k = j \\ m_k m_j \|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^{-p}(\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^{p-1} + C_{kj}), & \text{si} \quad k \neq j. \end{cases}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Considerando el aglomerado como un sistema aislado tenemos

$$W_{\Gamma_i}(\boldsymbol{r}) := \sum_{k<j\in\Gamma_i} W_{kj}(\boldsymbol{r}).$$

De lo anterior, definimos el potencial de los aglomerados por

$$W_{\Gamma}(\boldsymbol{r}) := \sum_{i\in\mathcal{J}} W_{\Gamma_i}(\boldsymbol{r}),$$

y el potencial de interacción entre aglomerados como

$$Q_{\Gamma}(\boldsymbol{r}) := W(\boldsymbol{r}) - W_{\Gamma}(\boldsymbol{r}). \tag{2.30}$$

La Proposición 4.1 del Apéndice nos garantiza que el potencial casi-homogéneo W es invariante por traslaciones. Por lo tanto, si $\widetilde{\boldsymbol{r}} \in \Delta_\Gamma$ implica que $W_\Gamma(\boldsymbol{r}+\widetilde{\boldsymbol{r}}) = W_\Gamma(\boldsymbol{r})$ y como $\Delta_\Gamma = Im\pi_\Gamma$, es decir, $\widetilde{\boldsymbol{r}} = \pi_\Gamma(\widetilde{\boldsymbol{r}})$ tenemos

$$W_\Gamma(\boldsymbol{r}+\pi_\Gamma(\widetilde{\boldsymbol{r}})) = W_\Gamma(\boldsymbol{r}),\ \ \forall\ \widetilde{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{R}^{3N}. \tag{2.31}$$

Denotamos el gradiente de W respecto al producto interno en (2.25) por ∇W. Es decir, $\nabla W(\boldsymbol{r})$ es un vector en $\mathbb{R}^{3N}$ tal que

$$\langle \nabla W_\Gamma(\boldsymbol{r}), \widetilde{\boldsymbol{r}}\rangle = \mathcal{D}W_\Gamma(\boldsymbol{r})\widetilde{\boldsymbol{r}},\ \ \forall\ \widetilde{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{R}^{3N},$$

donde $\mathcal{D}W_\Gamma : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}$ denota la derivada de W.

Diferenciando (2.31) respecto a $\widetilde{\boldsymbol{r}}$ tenemos

$$\mathcal{D}W_\Gamma(\boldsymbol{r}+\pi_\Gamma(\widetilde{\boldsymbol{r}}))\cdot\mathcal{D}\pi_\Gamma(\widetilde{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{h} = 0, \tag{2.32}$$

como π_Γ es una aplicación lineal se sigue que $\mathcal{D}\pi_\Gamma(\widetilde{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{h} = \pi_\Gamma(\boldsymbol{h})$ ahora, haciendo $\widetilde{\boldsymbol{r}} = \mathbf{0}$ se tiene de (2.32)

$$\mathcal{D}W_\Gamma(\boldsymbol{r})\cdot\pi_\Gamma(\boldsymbol{h}) = 0,$$

entonces,

$$\langle \nabla W_\Gamma(\boldsymbol{r}), \pi_\Gamma(\boldsymbol{h})\rangle = \langle \pi_\Gamma\nabla W_\Gamma(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{h}\rangle = 0,\ \ \forall\ \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{3N},$$

de donde $\pi_\Gamma\nabla W_\Gamma(\boldsymbol{r}) = 0$ para todo $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{3N}$. Luego, de las ecuaciones (2.10) y (2.30) obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla W(\boldsymbol{r}) &= \nabla Q_\Gamma(\boldsymbol{r}) + \nabla W_\Gamma(\boldsymbol{r})\\ \ddot{\boldsymbol{r}} &= \nabla Q_\Gamma(\boldsymbol{r}) + \nabla W_\Gamma(\boldsymbol{r})\\ \pi_\Gamma\ddot{\boldsymbol{r}} &= \pi_\Gamma\nabla Q_\Gamma(\boldsymbol{r}) + \pi_\Gamma\nabla W_\Gamma(\boldsymbol{r}).\end{aligned}$$

Así,

$$\pi_\Gamma\ddot{\boldsymbol{r}} = \pi_\Gamma\nabla Q_\Gamma(\boldsymbol{r}),\ \ \forall\ \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{3N}. \tag{2.33}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Como $I(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{r}\|^2 = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}\rangle$, entonces

$$\dot{I}(\boldsymbol{r}(t)) = \langle \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}\rangle \quad \text{y} \quad \ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) = \langle \dot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{r}}\rangle + \langle \boldsymbol{r}, \ddot{\boldsymbol{r}}\rangle = \|\dot{\boldsymbol{r}}\|^2 + \langle \boldsymbol{r}, \ddot{\boldsymbol{r}}\rangle\,.$$

Además, puesto que $I_\Gamma(\boldsymbol{r}(t)) = I(\pi_\Gamma(\boldsymbol{r}(t)))$ se tiene

$$\dot{I}_\Gamma(\boldsymbol{r}(t)) = \dot{I}(\pi_\Gamma(\boldsymbol{r}(t))) = \langle \pi_\Gamma(\boldsymbol{r}(t)), \pi_\Gamma(\dot{\boldsymbol{r}}(t))\rangle\,.$$

Por otro lado, reescribiendo $\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t))$ como

$$\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) = \|\pi_\Gamma(\dot{\boldsymbol{r}}(t))\|^2 + \langle \pi_\Gamma(\boldsymbol{r}(t)), \pi_\Gamma(\ddot{\boldsymbol{r}}(t))\rangle\,, \tag{2.34}$$

y sustituyendo (2.33) en (2.34) tenemos

$$\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) = \|\pi_\Gamma(\dot{\boldsymbol{r}}(t))\|^2 + \langle \pi_\Gamma(\boldsymbol{r}(t)), \pi_\Gamma \nabla Q_\Gamma(\boldsymbol{r}(t))\rangle\,. \tag{2.35}$$

A continuación, se enuncia y demuestra el equivalente del Teorema de Von Zeipel [42] demostrado por McGehee [22] enunciado en el Capítulo 1, para el caso casi-homogéneo. Usando las notaciones anteriores, este teorema establece que una singularidad se debe a colisión si el sistema de partículas permanece acotado. En un lenguaje más simple podemos decir que la única forma en que puede ocurrir una pseudocolisión es que el sistema de partículas explote hacia el infinito en un tiempo finito.

Teorema 2.4. *(**Teorema de Von Zeipel para el caso casi-homogéneo**). Dado $p \geq 2$ con $C_{kj} > 0$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$. Si $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ es una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo* (2.20) *definida en un intervalo $[0, t_*)$ donde t_* es una singularidad tal que $\lim_{t\to t_*} I(\boldsymbol{r}(t)) < \infty$, entonces la singularidad es debida a colisión.*

La demostración de este teorema se dividirá en 3 pasos.

Paso 1.

Demostraremos que dada una partición $\Omega \subset \Gamma$ el potencial de interacción Q_Ω esta bien definida y además el ∇Q_Ω es acotado.

Demostración. En efecto, considere un intervalo (t^*, t) y denote por $\boldsymbol{r}[t]$ la clausura de $\boldsymbol{r}((t^*, t))$. Luego, como $\boldsymbol{r}[t]$ es compacto para todo $t > t^*$ (basta usar que $\boldsymbol{r}[t]$ es acotado, pues por hipótesis $I(\boldsymbol{r}(t))$ es acotado cuando $t \to t^*$), entonces el conjunto

$$\Delta^* := \bigcap_{t>t^*} \boldsymbol{r}[t] \subset \Delta, \tag{2.36}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

es también compacto por ser intersección de conjuntos compactos.

Sea G el conjunto de todas las particiones Γ de $\{1, 2, \ldots, N\}$ tal que $G \neq 0$ y suponga que existe una partición $\Omega \in G$ con una cardinalidad menor a la de Γ, entonces para cada partición Ω, defina

$$\Delta_\Omega^* = \Delta^* \cap \Delta_\Omega. \tag{2.37}$$

Además, definamos el potencial de aglomerados para la partición Ω como

$$Q_\Omega(\boldsymbol{r}) = W(\boldsymbol{r}) - W_\Omega(\boldsymbol{r}) = \sum_{\Omega_i, \Omega_j \in \Omega} W_{\Omega_i, \Omega_j}(\boldsymbol{r}), \tag{2.38}$$

para algún $i, j \in \mathcal{J}$ donde

$$W_{\Omega_i,\Omega_j}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in\Omega_i}\sum_{j\in\Omega_j} W_{kj}(\boldsymbol{r}), & \text{si } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \\ 0, & \text{si } \Omega_i = \Omega_j. \end{cases}$$

Observe que la elección de la partición Ω nos asegura que todos los denominadores en la fórmula (2.38) para $Q_\Omega(\boldsymbol{r})$ son distintos de cero para todos los $\boldsymbol{r}$ en Δ_Ω^* y por lo tanto, $Q_\Omega(\boldsymbol{r})$ está bien definida en este conjunto.

Ahora, como Δ^* es compacto por (2.36), entonces Δ_Ω^* es compacto por (2.37), luego existe una vecindad $\widetilde{\Delta}$ de Δ_Ω^* en $\mathbb{R}^{3N}$ tal que

$$\|\nabla Q_\Omega(\boldsymbol{r})\| \leq \widetilde{k} \quad \text{y} \quad \langle \pi_\Omega(\boldsymbol{r}), \nabla Q_\Omega(\boldsymbol{r})\rangle \leq \widetilde{k}, \ \forall \ \boldsymbol{r} \in \widetilde{\Delta}, \tag{2.39}$$

donde $\tilde{k} \in \mathbb{R}$. ■

Paso 2.

Un paso importante es demostrar que $\Delta^* \subset \Delta_\Omega$, donde $\Omega \in G$.

Demostración. De hecho, suponga que Δ^* no está contenido en Δ_Ω, y considere un subconjunto abierto B de Δ_Ω tal que $\overline{B}$ es el cerrado más pequeño que contiene a B, entonces

$$\Delta_\Omega^* \subset B \subset \overline{B} \subset \widetilde{\Delta}. \tag{2.40}$$

Para una constante $\sigma > 0$ se define

$$B_\sigma := \{\boldsymbol{r} / \|\pi_\Omega(\boldsymbol{r})\| < \sigma\}. \tag{2.41}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Ahora, puesto que B es un abierto $\partial B \cap B = \emptyset$, entonces por (2.40) tenemos que $\partial B \cap \Delta^* = \emptyset$ donde ∂B es la frontera de B el cual es compacto, entonces existe $\sigma_0 > 0$ y $\tau > t_*$, tales que

$$\boldsymbol{r}[\tau] \cap (\overline{B}_{\sigma_0} \times \partial B) = \emptyset. \tag{2.42}$$

Asuma que σ_0 es suficientemente pequeño tal que

$$\overline{B}_{\sigma_0} \times \overline{B} \subset \widetilde{\Delta}. \tag{2.43}$$

Ahora, como la suma directa de dos espacios puede ser identificada como su producto cartesiano, entonces

$$\boldsymbol{r} = \pi_\Omega(\boldsymbol{r}) + \pi^\Omega(\boldsymbol{r}) = (\pi_\Omega(\boldsymbol{r}), \pi^\Omega(\boldsymbol{r})). \tag{2.44}$$

Como Δ^* no está contenida en Δ_Ω, entonces existe $\sigma \in (0, \tau)$ tal que para infinitos valores de t cercanos a t_*, $\boldsymbol{r}(t) \notin \overline{B}_\sigma \times \overline{B}$. Consideramos entonces un valor específico de σ. Sean $\alpha_i > 0$, tales que dado α_1 podemos elegir $t_1 > t_*$ tal que

$$|I(\boldsymbol{r}(t)) - I^*| < \alpha_1 \sigma^2, \quad \forall\ t \in (t_*, t_1). \tag{2.45}$$

Observe que cuando $t \to t_*$, la órbita $\boldsymbol{r}(t)$ se aproxima el mismo número de veces arbitrariamente cerca de Δ^*_Ω, $\boldsymbol{r}(t)$ entra y sale del conjunto $\overline{B}_\sigma \times B$ el mismo número de veces. La propiedad (2.42) implica que $\boldsymbol{r}(t)$ entra y sale por $\partial B_\sigma \times B$ para valores de t en (t_*, t_1). Por lo tanto, podemos encontrar un intervalo de tiempo $[t_2, t_3] \subset (t_*, t_1)$ tal que

$$|t - t_3| < \alpha_2 \sigma, \tag{2.46}$$

tal que que $\boldsymbol{r}(t) \in \overline{B}_\sigma \times B$ para todo $t \in [t_2, t_3]$, además

$$I^\Omega(\boldsymbol{r}(t_2)) = I^\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) = \sigma^2. \tag{2.47}$$

y

$$\min_{t \in [t_2, t_3]} I^\Omega(\boldsymbol{r}(t)) < \alpha_3 \sigma^2. \tag{2.48}$$

Dado $\mu \in (t_2, t_3)$ tal que $I_\Omega(\boldsymbol{r}(\mu))$ es el mayor valor de la función $I_\Omega(\boldsymbol{r}(t))$. Por (2.45) tenemos que $I(\boldsymbol{r}(t)) - I^* > -\alpha_1 \sigma^2$, y además de la relación (2.28) definida en la partición Ω, es decir, $I(\boldsymbol{r}(t)) = I_\Omega(\boldsymbol{r}(t)) + I^\Omega(\boldsymbol{r}(t))$ se sigue que

$$I(\boldsymbol{r}(t)) > I^* - \alpha_1 \sigma^2,$$

luego,

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(t)) + I^\Omega(\boldsymbol{r}(t)) > I^* - \alpha_1 \sigma^2,$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

o equivalentemente,

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(t)) > I^* - \alpha_1\sigma^2 - I^\Omega(\boldsymbol{r}(t)),$$

y por (2.48) tenemos que

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(t)) > I^* - \alpha_1\sigma^2 - \alpha_3\sigma^2,$$

entonces,

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(t)) > I^* - (\alpha_1 + \alpha_3)\sigma^2, \quad \forall\ t \in [t_2, t_3].$$

Como $I(\boldsymbol{r}(\mu))$ es el máximo valor de $I(\boldsymbol{r}(t))$ en el intervalo (t_2, t_3) se sigue que

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(\mu)) > I^* - \alpha_4\sigma^2, \tag{2.49}$$

donde $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3$.

Por otro lado, de (2.45) tenemos también

$$I(\boldsymbol{r}(t_3)) < I^* + \alpha_1\sigma^2,$$

entonces,

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) + I^\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) < I^* + \alpha_1\sigma^2,$$

luego,

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) < I^* + \alpha_1\sigma^2 - \sigma^2,$$

es decir,

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) < I^* - \alpha_5\sigma^2, \tag{2.50}$$

donde $\alpha_5 = 1 - \alpha_1$. Por lo tanto, de (2.49) y (2.50)

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(\mu)) - I_\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) > \sigma^2(\alpha_5 - \alpha_4),$$

pero, como $\alpha_5 - \alpha_4 = 1 - \alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_3) = 1 - (2\alpha_1 + \alpha_3)$ se tiene que

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(\mu)) - I_\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) > \sigma^2\alpha_6, \tag{2.51}$$

tal que $\alpha_6 = 1 - (2\alpha_1 + \alpha_3)$.
Ahora, por (2.35) y (2.39) tenemos que

$$\ddot{I}(\boldsymbol{r}(t)) \geq -\alpha_7, \quad \forall\ t \in [t_2, t_3]$$

siendo $\alpha_7 = \widetilde{k}$. Luego, usando expansión de Taylor alrededor de μ para $\mu \leq c \leq t$ tenemos

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(t)) = I_\Omega(\boldsymbol{r}(\mu)) + \frac{(t-\mu)^2}{2}\ddot{I}_\Omega(\boldsymbol{r}(c)).$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

de donde

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(t)) - I_\Omega(\boldsymbol{r}(\mu)) \geq -\frac{(t-\mu)^2}{2}\alpha_7,$$

así, tomando $t = t_3$

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) - I_\Omega(\boldsymbol{r}(\mu)) \geq -\alpha_8(t_3-\mu)^2,$$

con $\alpha_8 = \dfrac{\alpha_7}{2} = \dfrac{\widetilde{k}}{2}$.
De la ecuación anterior se sigue que

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(\mu)) - I_\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) < \alpha_8(t_3-\mu)^2.$$

Por (2.46) tenemos

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(\mu)) - I_\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) < \alpha_8\alpha_2^2\sigma^2.$$

Así, para $\alpha_9 = \alpha_8\alpha_2^2$ se cumple

$$I_\Omega(\boldsymbol{r}(\mu)) - I_\Omega(\boldsymbol{r}(t_3)) < \sigma^2\alpha_9.$$

Dado que $\alpha_6 = 1 - (2\alpha_1 + \alpha_3)$ y $\alpha_9 = \widetilde{k}\alpha_2^2/2$ podemos elegir $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de tal modo que $\alpha_9 < \alpha_6$, pero esto es una contradicción con (2.51). Se concluye entonces que

$$\Delta^* \subset \Delta_\Omega.$$

■

Paso 3.

Demostraremos que dado el paso anterior t_* es una singularidad debida a colisión.

Demostración. De hecho, del paso 2 se sigue que

$$\lim_{t\to t_*} \pi^\Omega(\boldsymbol{r}(t)) = 0. \tag{2.52}$$

Además, dado que $\Delta^* = \Delta_\Omega^*$, entonces existe t_4 tal que $\boldsymbol{r}(t) \in \widetilde{\Delta}$ para todo $t \in (t_*, t_4)$ siendo $\widetilde{\Delta}$ una vecindad de Δ_Ω^*. Usando (2.33) obtenemos

$$\ddot{\pi}_\Omega(\boldsymbol{r}(t)) = \pi_\Omega \nabla Q_\Omega(\boldsymbol{r}(t)), \quad \forall\ t \in (t_*, t_4),$$

y por (2.39) tenemos

$$\|\ddot{\pi}_\Omega(\boldsymbol{r}(t))\| < \widetilde{k}, \quad \forall\ t \in (t_*, t_4).$$

Expandiendo nuevamente en serie de Taylor se sigue que existe $\lim\limits_{t\to t_*} \pi_\Omega(\boldsymbol{r}(t))$, entonces por (2.44) y (2.52) tenemos que $\lim\limits_{t\to t_*}(\boldsymbol{r}(t))$ también existe, es decir, t_* es una singularidad debida a colisión. Así, el Teorema de Von Zeipel queda demostrado. ■

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

El siguiente teorema nos dice que en el problema colineal de tres cuerpos, si se tiene una singularidad, esta se debe a colisión.

Teorema 2.5. *Asuma $p \geq 2$ con $C_{kj} > 0$ para $k = 3$ y $j = 1, 2$. En el problema colineal de 3-cuerpos con potencial casi-homogéneo, si t_* es una singularidad, entonces t_* es una singularidad debida a colisión.*

Demostración. Suponga que los vectores posición de cada partícula están ordenadas de la siguiente manara

$$\boldsymbol{r}_1(t) \leq \boldsymbol{r}_2(t) \leq \boldsymbol{r}_3(t).$$

Note que $\boldsymbol{r}_1(t) \leq 0$. De echo, si $\boldsymbol{r}_1(t) > 0$ y dado que $m_k > 0$ para $k = 1, 2, 3$, entonces no puede ocurrir que $m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 = 0$. Para esta demostración utilizamos fuertemente el hecho de que el centro de masa se encuentra en el origen del sistema.

Procedamos por el absurdo. En efecto, supongamos que t_* es una singularidad que no se debe a colisión, entonces aplicando las condiciones del Teorema 2.4 tenemos que $I(\boldsymbol{r}(t)) \longrightarrow \infty$ cuando $t \to t_*$. Ahora, como

$$I(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{1}{2M} \sum_{1 \leq k < j \leq 3} m_k m_j r_{kj}^2(t),$$

tenemos que existe $\beta > 0$ tal que

$$I(\boldsymbol{r}(t)) \leq \beta \mathcal{R}^2(t), \tag{2.53}$$

para cada t donde $\mathcal{R}(t)$ es definido en (1.17). Para demostrar la desigualdad en (2.53) basta tomar $\beta = \dfrac{1}{2M} \displaystyle\sum_{1 \leq k < j \leq 3} m_k m_j$.

Ahora, puesto que $I(\boldsymbol{r}(t)) \longrightarrow \infty$, se sigue de (2.53) que $\mathcal{R}(t) \longrightarrow \infty$ cuando $t \to t_*$, pero como $\boldsymbol{r}_1(t) \leq \boldsymbol{r}_2(t) \leq \boldsymbol{r}_3(t)$, entonces $\mathcal{R}(t) = |\boldsymbol{r}_3(t) - \boldsymbol{r}_1(t)|$, por lo tanto $|\boldsymbol{r}_3(t) - \boldsymbol{r}_1(t)| \longrightarrow \infty$ cuando $t \to t^*$. Supongamos que $\boldsymbol{r}_3$ es acotado, entonces se sigue que $\boldsymbol{r}_1(t) \longrightarrow -\infty$. Por otro lado, como el centro de masa se encuentra en el origen del sistema, obtenemos

$$\limsup_{t \to t_*} \boldsymbol{r}_2(t) = \infty.$$

Por hipótesis las partículas están ordenadas, entonces se sigue que $\boldsymbol{r}_3(t) \longrightarrow \infty$, es decir,

$$\limsup_{t \to t_*} \boldsymbol{r}_3(t) = +\infty,$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

la cual es una contradicción. Ahora, puesto que

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_3 = \sum_{j=1}^{2} \left[\frac{m_j(\boldsymbol{r}_j(t) - \boldsymbol{r}_3(t))}{\|\boldsymbol{r}_j(t) - \boldsymbol{r}_3(t)\|^3} + \frac{pm_jC_{3j}(\boldsymbol{r}_j(t) - \boldsymbol{r}_3(t))}{\|\boldsymbol{r}_j(t) - \boldsymbol{r}_3(t)\|^{p+2}} \right],$$

y como $\boldsymbol{r}_j(t) - \boldsymbol{r}_3(t) < 0$ y además, como $p \geq 2$ y $C_{kj} > 0$ para $k = 3$ y $j = 1, 2$ se sigue que $\ddot{\boldsymbol{r}}_3 < 0$ para todo tiempo donde la solución está definida. Sin embargo, $\boldsymbol{r}_3(t)$ es acotada y positiva, por lo tanto del Lema 4.4 del Apéndice tenemos una contradicción pues no existe función dos veces diferenciable definida en todo $\mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{r}_3 > 0$ y $\ddot{\boldsymbol{r}}_3 < 0$. ■

El siguiente teorema nos dice que para el problema de tres cuerpos no colineal, todas las singularidades se deben a colisión.

Teorema 2.6. *Asuma $p \geq 2$ con $C_{kj} > 0$ para cada k, j. En el problema no colineal de 3-cuerpos con potencial casi-homogéneo, todas las singularidades son debidas a colisión.*

Demostración. Supongamos que t_* es una singularidad debida a colisión. Es decir, al menos una de las distancias mutuas debe tender a cero cuando $t \to t_*$, es decir, existen k y j con $k \neq j$ tal que

$$\lim_{t \to t_*} r_{kj}(t) = 0. \tag{2.54}$$

Razonando por contradicción, suponga que (2.54) no se cumple. Es decir,

$$\limsup_{t \to t_*}(r_{kj}(t)) > 0$$

para cada k, j con $k \neq j$. Entonces, se sigue por definición que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $t \in (t_* - \delta, t_*)$ tenemos que

$$r_{kj}(t) < \limsup_{t \to t_*}(r_{kj}(t)) + \varepsilon.$$

Aplicando las condiciones del Teorema 2.3, si t_* es una singularidad, entonces,

$$\rho(\boldsymbol{r}(t)) = \text{mín}\{r_{12}(t), r_{23}(t), r_{13}(t)\} \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \to t_*.$$

De esto, deducimos que al menos una de las distancias mutuas intercambian el rol de ser mínimo infinidad de veces. Digamos que cumplen este rol r_{13} y r_{23}. Consideramos una sucesión $(t_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ y $t_\alpha \to t_*$. Dado que $\rho(\boldsymbol{r}(t)) \longrightarrow 0$ cuando $t_\alpha \to t_*$, entonces $r_{13}(t_\alpha)$ y $r_{23}(t_\alpha)$ ambas distancias mutuas tienden para 0 cuando $t \to t_*$. Así, por la

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

desigualdad triangular tenemos que $r_{12}(t_\alpha) \longrightarrow 0$ cuando $t \to t_*$. Por tanto, $I(t_\alpha) \to 0$.

Sabemos que $I = \dfrac{1}{2M} \displaystyle\sum_{1\leq k<j\leq 3} m_k m_j r_{kj}^2$, entonces de lo anterior tenemos que $r_{kj}(t_\alpha) \longrightarrow 0$ cuando $t_\alpha \to t_*$ esto implica que $I(t_\alpha) \longrightarrow 0$ cuando $t_\alpha \to t_*$. En particular, tenemos que $r_{kj}(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \to t_*$. Por tanto, $I(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \to t_*$.
Aplicando también las condiciones de la Proposición 2.2 tenemos que existe I^* tal que $\lim\limits_{t\to t_*} I(\boldsymbol{r}(t)) = I^*$. Por lo tanto, se deduce

$$\lim_{t\to t_*} I(\boldsymbol{r}(t)) = 0.$$

Luego, $r_{12}(t)$, $r_{13}(t)$ y $r_{23}(t)$ todas tienden para 0 cuando $t \to t_*$. Así, el límite de r_{kj} y consecuentemente

$$\lim_{t\to t_*} \sup(r_{kj}(t)) = 0,$$

lo cual es una contradicción. ■

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 3

Problema tipo Maxwell de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo

Este capítulo está dedicado a estudiar la existencia de soluciones circulares de N-partículas de igual masa m ubicados en cada vértice de un polígono regular las cuales giran en órbitas circulares con el mismo radio ρ y velocidad angular constante. En general, a esto se le denomina problema tipo Maxwell en honor a James Clerk Maxwell que en 1859 publicó su estudio de los anillos de Saturno ([23], [24]). Como primera aproximación trata el anillo como un polígono regular rígidamente giratorio de N-partículas con masas iguales.

Más adelante en este capítulo estudiaremos los equilibrios relativos y su estabilidad para luego finalizar con el estudio del caso particular $N = 3$ del problema tipo Maxwell con potencial casi-homogéneo.

En lo que sigue asumiremos que $\omega > 0$, es decir, las partículas giran en sentido antihorario.

3.1. Existencia de soluciones circulares en el problema tipo Maxwell de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo

Tenemos de (2.1) que las ecuaciones de movimiento para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo con $m_k = m$ para cada $k = 1, \ldots, N$ son

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_k = m \sum_{j=1, k\neq j}^{N} \left[\frac{\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k}{r_{jk}^3} + \frac{pC_{kj}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{r_{jk}^{p+2}} \right], \quad k = 1, \ldots, N, \tag{3.1}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

A continuación, nuestro objetivo será caracterizar un tipo particular de soluciones periódicas tipo Maxwell, más precisamente queremos caracterizar una solución periódica donde todas las partículas se encuentran en un círculo de radio ρ, masas iguales y girando con velocidad angular constante formando un polígono regular (ver Figura 3.1). Proponemos que dichas soluciones circulares están parametrizadas por

$$\boldsymbol{r}_k(t) = \rho e^{i(\omega t+\theta_k)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

donde,

$$\theta_k = \theta_0 + 2\pi\left(\frac{k-1}{N}\right), \quad k = 1, \ldots, N.$$

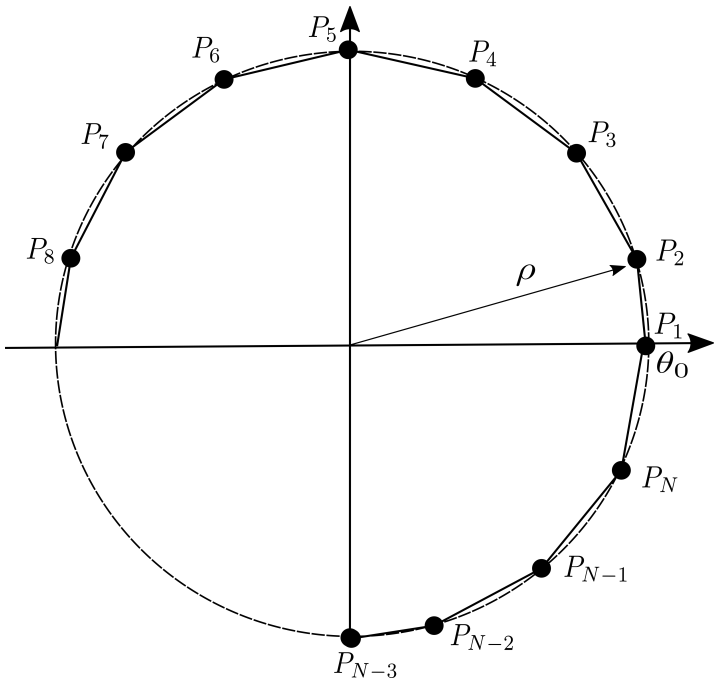


Figura 3.1: Solución formando un polígono regular.

Sin pérdida de generalidad supondremos que $\theta_0 = 0$, entonces

$$\theta_k = 2\pi\left(\frac{k-1}{N}\right). \tag{3.3}$$

De (3.2) obtenemos la segunda derivada de $\boldsymbol{r}_k$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_k &= i\omega \boldsymbol{r}_k = i\omega\rho e^{i(\omega t+\theta_k)}, \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_k &= i\omega \dot{\boldsymbol{r}}_k = -\omega^2 \rho e^{i\theta_k} e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Calculamos las distancias mutuas

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k &= \rho e^{i(\omega t+\theta_j)} - \rho e^{i(\omega t+\theta_k)} \\ &= \rho e^{i\omega t}\left(e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}\right) \\ &= \rho e^{i\omega t} e^{i\theta_k}\left(e^{i(\theta_j-\theta_k)} - 1\right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

luego,

$$r_{jk} = \|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k\| = \rho \underbrace{\|e^{i(\theta_j-\theta_k)} - 1\|}_{d_{jk}} = \rho d_{jk}, \tag{3.6}$$

donde,

$$\begin{aligned} d_{jk}^2 &= (\cos(\theta_j-\theta_k)-1)^2 + \sin^2(\theta_j-\theta_k) \\ &= \cos^2(\theta_j-\theta_k) - 2\cos(\theta_j-\theta_k) + 1 + \sin^2(\theta_j-\theta_k) \\ &= 2 - 2\cos(\theta_j-\theta_k) \\ d_{jk} &= \sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\theta_j-\theta_k)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Reemplazando en (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{m}e^{i\theta_k} &= \sum_{j=1,j\neq k}^{N}\left(\frac{(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k})}{\rho^3 d_{jk}^3} + \frac{pC_{kj}(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k})}{\rho^{p+2}d_{jk}^{p+2}}\right) \\ -\frac{\omega^2}{m}e^{i\theta_k} &= \sum_{j=1,j\neq k}^{N}\frac{(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k})}{\rho^3}\left(\frac{1}{d_{jk}^3} + \frac{pC_{kj}}{\rho^{p-1}d_{jk}^{p+2}}\right) \\ -\frac{\omega^2}{m}e^{i\theta_k} &= e^{i\theta_k}\sum_{j=1,j\neq k}^{N}\frac{(e^{i(\theta_j-\theta_k)}-1)}{\rho^3}\left(\frac{1}{d_{jk}^3} + \frac{pC_{kj}}{\rho^{p-1}d_{jk}^{p+2}}\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$-\frac{\omega^2}{m} = \sum_{j=1,j\neq k}^{N}\frac{(e^{i(\theta_j-\theta_k)}-1)}{\rho^3}\left(\frac{1}{d_{jk}^3} + \frac{pC_{kj}}{\rho^{p-1}d_{jk}^{p+2}}\right). \tag{3.8}$$

Así, el sistema en (3.8) es equivalentemente a

$$\frac{\omega^2}{m}\rho^3 = \sum_{j=1,j\neq k}^{N}\left(\frac{1}{d_{jk}^3} + \frac{pC_{kj}}{\rho^{p-1}d_{jk}^{p+2}}\right)(1-\cos(\theta_j-\theta_k)) \tag{3.9}$$

$$0 = \sum_{j=1,j\neq k}^{N}\left(\frac{1}{d_{jk}^3} + \frac{pC_{kj}}{\rho^{p-1}d_{jk}^{p+2}}\right)\sin(\theta_j-\theta_k), \tag{3.10}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

para cada $k = 1, \ldots, N$.

A continuación analizaremos los sistemas (3.9) y (3.10). De hecho, de (3.3) se sigue que

$$\theta_j - \theta_k = 2\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right), \tag{3.11}$$

de donde,

$$1 - \cos(\theta_j - \theta_k) = 2\sin^2\left(\frac{(\theta_j - \theta_k)}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right), \tag{3.12}$$

luego, sustituyendo en (3.7) tenemos

$$d_{jk} = 2\left|\sin\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right)\right|. \tag{3.13}$$

Así, el sistema en (3.9) es equivalente a

$$\frac{\omega^2}{m}\rho^3 = \sum_{j=1, j\neq k}^{N}\left(\frac{1}{4}\left|\csc\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right)\right| + \frac{pC_{kj}}{2^{p+1}}\frac{1}{\rho^{p-1}}\left|\csc\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right)\right|^p\right), \tag{3.14}$$

para cada $k = 1, \ldots, N$.
Análogamente, el sistema en (3.10) es equivalente a

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{N}\left(\frac{1}{8}\frac{\sin\left(\frac{2\pi(j-k)}{N}\right)}{\left|\sin^3\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right)\right|} + \frac{pC_{kj}}{2^{p+2}}\frac{1}{\rho^{p-1}}\frac{\sin\left(\frac{2\pi(j-k)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right)\right|^{p+2}}\right) = 0, \tag{3.15}$$

para cada $k = 1, \ldots, N$.

Por lo tanto, se debe demostrar que (3.14) se reduce a una sola ecuación que no depende de k y además que (3.15) es nula para cada $k = 1, \ldots, N$.

Demostraremos (3.15). En efecto, sea

$$\mathcal{S}_k^N = \sum_{j=1, j\neq k}^{N}\frac{\sin\left(\frac{2\pi(j-k)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right)\right|}. \tag{3.16}$$

Para $k = 1$ tenemos

$$\mathcal{S}_1^N = \sum_{j=2}^{N}\frac{\sin\left(\frac{2\pi(j-1)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(j-1)}{N}\right)\right|},$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

entonces,

$$\mathcal{S}_1^N = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right|} + \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right|} + \cdots + \frac{\sin\left(\frac{2\pi(N-2)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(N-2)}{N}\right)\right|} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi(N-1)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(N-1)}{N}\right)\right|}. \tag{3.17}$$

Luego, por propiedad de las funciones trigonométricas (3.17) es equivalente a

$$\mathcal{S}_1^N = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right|} + \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right|} + \cdots - \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right|} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right|}.$$

Observamos que para $k = 1$ y N impar los términos de la suma se anulan dos a dos, es decir, para $j \geq 2$ el primer y último término de $\mathcal{S}_1^N$ se anula con el penúltimo y último término de la forma

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi(N-(j-1))}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(N-(j-1))}{N}\right)\right|}.$$

Ahora, si N par, para $j = N/2 + 1$ obtendremos el siguiente término

$$\frac{\sin(\pi)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|},$$

el cual claramente es nulo. Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_1^N = 0.$$

Para $k = 2$ tenemos

$$\mathcal{S}_2^N = \sum_{j=1, j\neq 2}^{N} \frac{\sin\left(\frac{2\pi(j-2)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(j-2)}{N}\right)\right|},$$

entonces,

$$\mathcal{S}_2^N = -\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right|} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right|} + \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right|} + \frac{\sin\left(\frac{6\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{3\pi}{N}\right)\right|} + \cdots + \frac{\sin\left(\frac{2\pi(N-3)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(N-3)}{N}\right)\right|} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi(N-2)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(N-2)}{N}\right)\right|}. \tag{3.18}$$

Luego, por propiedad de las funciones trigonométricas (3.18) es equivalente a

$$\mathcal{S}_2^N = -\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right|} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right|} + \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right|} + \frac{\sin\left(\frac{6\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{3\pi}{N}\right)\right|} + \cdots - \frac{\sin\left(\frac{6\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{3\pi}{N}\right)\right|} - \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right|}.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Observamos que para $k = 2$ y N impar los términos de la suma se anulan completamente, es decir, para $j \geq 1, j \neq 2$ el primer y último término de $\mathcal{S}_2^N$ se anula con el penúltimo y último término de la forma

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi(N-(j-2))}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(N-(j-2))}{N}\right)\right|}.$$

Ahora, si N par, para $j = N/2 + 2$ obtendremos el siguiente término

$$\frac{\sin(\pi)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|},$$

el cual claramente es nulo. Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_2^N = 0.$$

Generalizando de (3.16) tenemos que

$$\mathcal{S}_k^N = \sum_{j=1, j\neq k}^{N} \frac{\sin\left(\frac{2\pi(j-k)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right)\right|}.$$

Analizaremos los siguientes casos

- $2k - 1 \leq N$ y
- $2k - 1 > N$.

Ahora bien, si $j = k - 1$ el término que obtendremos es

$$-\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)},$$

el cual se anula con el término $j = k + 1$ dado por

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}.$$

El término $j = k - 2$, es decir,

$$-\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)},$$

se anula con el término $j = k + 2$ dado por

$$\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Continuando con este proceso llegamos al primer término de la suma cuando $j = k - (k-1) = 1$ el cual según el razonamiento anterior se anula con el término $j = k + (k-1) = 2k - 1$.
Ahora bien, se observa que todos los términos desde $j = 1$ hasta $j = 2k - 1$ son nulos cuando $k < 2k - 1 \leq N$. ¿Pero que ocurre con los términos más allá de $j = 2k - 1$?. Esta respuesta la damos a continuación.

Si $j = 2k$ el término que obtenemos es

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right|},$$

el cual se anula con el N-ésimo término de la suma, es decir, con

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi(N-k)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(N-k)}{N}\right)\right|} = \frac{\sin\left(2\pi - \frac{2\pi k}{N}\right)}{\left|\sin\left(\pi - \frac{\pi k}{N}\right)\right|} = -\frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right|}.$$

Si $j = 2k + 1$, el término que obtendremos es

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(k+1)}{N}\right)\right|},$$

el cual se anula con el $N - 1$-ésimo término de la suma dado por

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi(N-1-k)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(N-1-k)}{N}\right)\right|} = -\frac{\sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(k+1)}{N}\right)\right|}.$$

Continuando con este análisis los términos desde $j = 2k$ hasta $j = N$ se anulan siempre y cuando N sea impar. ¿Pero que ocurre con los términos medios de la sumatoria?. De hecho, si tomamos $j = N/2 + k$ cuando N es par, se obtiene

$$\frac{\sin(\pi)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|},$$

el cual es evidentemente nulo.

A continuación, vamos a suponer que $2k - 1 > N$. En efecto, análogamente al caso anterior los términos desde el l-ésimo término, es decir, desde $j = k - (k-l)$ hasta el N-ésimo término, es decir, hasta $j = k + (k-l) = 2k - l = N$ donde $l = 2k - N > 0$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

se anulan dos a dos.

Ahora, nos hacemos la siguiente pregunta. ¿Que sucede con los términos que van desde el primero hasta el término de la forma $l-1$?. Veamos entonces lo siguiente.

Puesto que $j=l$, entonces $l-1=2k-N-1=j$. Reemplazando obtenemos el siguiente término

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi(k-N-1)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(k-N-1)}{N}\right)\right|}=-\frac{\sin\left(\frac{2\pi(1-k)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(1-k)}{N}\right)\right|}.$$

el cual claramente se anula con el primer término de la sumatoria en (3.16). El mismo razonamiento usamos para anular el término $j=l-2$ con el segundo término de la suma. Así, para N impar los términos de la sumatoria se anulan dos a dos.

Ahora, si N es par, para $j=k-N/2$ obtendremos el siguiente término

$$-\frac{\sin(\pi)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|},$$

el cual es evidentemente nulo.

Por lo tanto, con lo analizado en los dos casos anteriores, hemos abarcado todos los términos de la sumatoria dada en (3.16). Luego

$$\mathcal{S}_k^N=\sum_{j=1,j\neq k}^{N}\frac{\sin\left(\frac{2\pi(j-k)}{N}\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right)\right|}=0.$$

En conclusión, (3.15) queda demostrado.

A continuación demostraremos (3.14). En efecto, sea

$$R_k^N=\sum_{j=1,j\neq k}^{N}\left|\csc\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right)\right|. \tag{3.19}$$

Para $k=1$ tenemos

$$R_1^N=\sum_{j=2}^{N}\left|\csc\left(\frac{\pi(j-1)}{N}\right)\right|=\sum_{l=1}^{N-1}\left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Observamos que para N impar y $k = 1$ los términos de la sumatoria se suman dos a dos. Entonces,

$$\begin{aligned} R_1^N &= 2\left|\csc\left(\frac{\pi}{N}\right)\right| + 2\left|\csc\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right| + \cdots \\ &= 2\sum_{l=1}^{[N/2]}\left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ahora, cuando N es par se tiene que

$$R_1^N = 2\sum_{l=1}^{[N/2]-1}\left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right| + 1, \tag{3.21}$$

siempre que $l = [N/2] + 1$.

Para $k = 2$ tenemos

$$R_2^N = \sum_{j=1, j\neq 2}^{N}\left|\csc\left(\frac{\pi(j-2)}{N}\right)\right| = \sum_{l=-1,\ l\geq 1}^{N-2}\left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|.$$

Note que para N impar y $k = 2$ los términos de la sumatoria se suman dos a dos, entonces,

$$\begin{aligned} R_2^N &= 2\left|\csc\left(\frac{\pi}{N}\right)\right| + 2\left|\csc\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right| + \cdots \\ &= 2\sum_{l=1}^{[N/2]}\left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ahora, cuando N es par tenemos que

$$R_2^N = 2\sum_{j=1}^{[N/2]-1}\left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right| + 1, \tag{3.23}$$

siempre que $j = [N/2] + 2$.

Generalizando de (3.19) tenemos que

$$R_k^N = \sum_{j=1, j\neq k}^{N}\left|\csc\left(\frac{\pi(j-k)}{N}\right)\right|.$$

Analizaremos los siguientes casos

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

- $2k-1 \leq N$ y
- $2k-1 > N$.

Ahora bien, si $j = k-1$ el término que obtendremos es

$$\left|\csc\left(\frac{\pi}{N}\right)\right|,$$

el cual se suma con el término $j = k+1$, es decir, con

$$\left|\csc\left(\frac{\pi}{N}\right)\right|.$$

El término $j = k-2$, es decir,

$$\left|\csc\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right|$$

se suma con el término $j = k+2$ dado por

$$\left|\csc\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right|.$$

Continuando con este proceso, el primer término de la sumatoria $j = 1$ se suma con el término de posición $j = 2k-1$.
Ahora bien, para que este análisis sea correcto debe acontecer que $k < 2k-1 \leq N$.

Para $j = 2k$ el término que obtenemos es

$$\left|\csc\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right|,$$

el cual se suma con el N-ésimo término de la sumatoria, es decir, con

$$\left|\csc\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right|.$$

Si $j = 2k+1$ el término que obtendremos es

$$\left|\csc\left(\frac{\pi(k+1)}{N}\right)\right|,$$

el cual se suma con el $N-1$-ésimo término de la sumatoria, es decir, con

$$\left|\csc\left(\frac{\pi(k+1)}{N}\right)\right|.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Continuando con este análisis, los términos desde $j = 2k$ hasta $j = N$ se suman dos a dos para N impar.

Ahora, cuando N es par los términos de la sumatoria se suman dos a dos más el siguiente término

$$\left|\csc\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1,$$

siempre que $j = [N/2] + k$.

Lo que implica finalmente que para N impar se tiene

$$R_k^N = 2\sum_{l=1}^{[N/2]} \left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|, \tag{3.24}$$

y para N par se tiene que

$$R_k^N = 2\sum_{l=1}^{[N/2]-1} \left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right| + 1. \tag{3.25}$$

Ahora, suponga que $2k-1 > N$. En efecto, se sigue del caso anterior que los términos desde el q-ésimo término, es decir, desde $j = k - (k - q)$ hasta $j = k + (k - q) = 2k - q = N$ donde $q = 2k - N > 0$ se suman dos a dos.

Para $q - 1 = 2k - N - 1 = q$ obtenemos el siguiente término

$$\left|\csc\left(\frac{\pi(k-N-1)}{N}\right)\right| = \left|\csc\left(\frac{\pi(1-k)}{N}\right)\right|,$$

el cual obviamente se suma con el primer término de la sumatoria de (3.19). El mismo razonamiento usamos para sumar el término $j = q - 2$ con el segundo término de la sumatoria. Se observa entonces que los términos de la sumatoria se suman dos a dos cuando N es impar y cuando N es par se suman de igual manera dos a dos.

Así, con lo analizado anteriormente hemos abarcado todos los términos de la sumatoria dada en (3.19). Luego, R_k^N no depende del valor de k. Por ende, (3.14) queda demostrado.

Por lo tanto, la ecuación (3.14) para el caso donde N es impar asume la siguiente forma

$$\frac{\omega^2}{m}\rho^3 = \frac{1}{4}\left(2\sum_{l=1}^{[N/2]}\left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|\right) + \frac{p}{2^{p+1}}\frac{1}{\rho^{p-1}}\cdot\left(2\sum_{l=1}^{[N/2]} C_{kj}\left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|^p\right), \tag{3.26}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

para cada k fijo. Ahora bien, deseamos que la ecuación anterior no dependa de k, es por eso que imponemos la condición $C_{kj} = C \in \mathbb{R}$ para cada k, j. A continuación definimos

$$A = 2\sum_{l=1}^{[N/2]} \left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|, \quad B = 2\sum_{l=1}^{[N/2]} \left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|^p. \tag{3.27}$$

Entonces, la ecuación (3.26) es equivalente a

$$\frac{\omega^2}{m}\rho^3 = \frac{1}{4}A + \frac{pBC}{2^{p+1}\rho^{p-1}}.$$

Para el caso N par reemplazamos en la ecuación (3.14) y tomando $C_{kj} = C \in \mathbb{R}$ para cada k, j obtenemos

$$\frac{\omega^2}{m}\rho^3 = \frac{1}{4}\left(2\sum_{l=1}^{[N/2]-1} \left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right| + 1\right) + \frac{pC}{2^{p+1}}\frac{1}{\rho^{p-1}}\left(2\sum_{l=1}^{[N/2-1]} \left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|^p + 1\right). \tag{3.28}$$

Entonces, de lo anterior definimos lo siguiente

$$A = 2\sum_{l=1}^{[N/2]-1} \left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right| + 1, \quad B = 2\sum_{l=1}^{[N/2]-1} \left|\csc\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right|^p + 1. \tag{3.29}$$

Así, la ecuación (3.26) es equivalente a

$$\frac{\omega^2}{m}\rho^3 = \frac{1}{4}A + \frac{pBC}{2^{p+1}\rho^{p-1}}.$$

De todo lo anterior, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sea $N \geq 2$, $C_{kj} = C \neq 0$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$, $m_l = m$, $\omega > 0$ para $l = 1, \ldots, N$, entonces las funciones $\boldsymbol{r}_k(t)$ dadas en* (3.2) *definen una solución $2\pi/\omega$ periódica para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo* (3.1) *formando un polígono regular sobre un círculo de radio ρ, siempre que se satisfaga la ecuación*

$$\frac{\omega^2}{m}\rho^{p+2} - \frac{A}{4}\rho^{p-1} - \frac{pBC}{2^{p+1}} = 0. \tag{3.30}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

A continuación, estudiaremos los valores de ρ (admisibles) que satisfacen (3.30). Este análisis será dividido en los casos $C > 0$ y $C < 0$. Notemos que de (3.30) podemos despejar la masa en función de ρ asumiendo que $C, \omega > 0$ y $p > 1$ están fijos. De hecho, se tiene

$$m = f(\rho) := \omega^2 \rho^{p+2} \left(\frac{A}{4} \rho^{p-1} + \frac{pBC}{2^{p+1}} \right)^{-1}, \tag{3.31}$$

donde $A > 0$, $B > 0$ son como en (3.29).

A continuación analizamos el caso $C > 0$.

Teorema 3.2. *Para el caso $C > 0$ y $p > 1$, $N > 2$, $\omega > 0$ arbitrarios. Dado $m > 0$, existe un único radio $\rho(m)$ que da origen a una solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo.*

Demostración. Demostraremos que $f(\rho)$ es una función monótona creciente. En efecto, derivando la función f con respecto a ρ tenemos

$$f'(\rho) = \frac{\omega^2 \rho^{p+1}}{\left(\frac{A}{4} \rho^{p-1} + \frac{pBC}{2^{p+1}} \right)^2} \left(\frac{3A}{4} \rho^{p-1} + \frac{p(p+2)}{2^{p+1}} BC \right). \tag{3.32}$$

Dado que $C > 0$ claramente $f'(\rho) > 0$, entonces f es una función monótona creciente, así $f(\rho) > f(0) = 0$. Además, $\lim_{\rho \to +\infty} f(\rho) = +\infty$. Por lo tanto, dado $m > 0$ existe un único $\rho > 0$ tal que $f(\rho) = m$ como en (3.31) (vea Figura (3.2)). Hemos concluido la demostración del teorema. ■

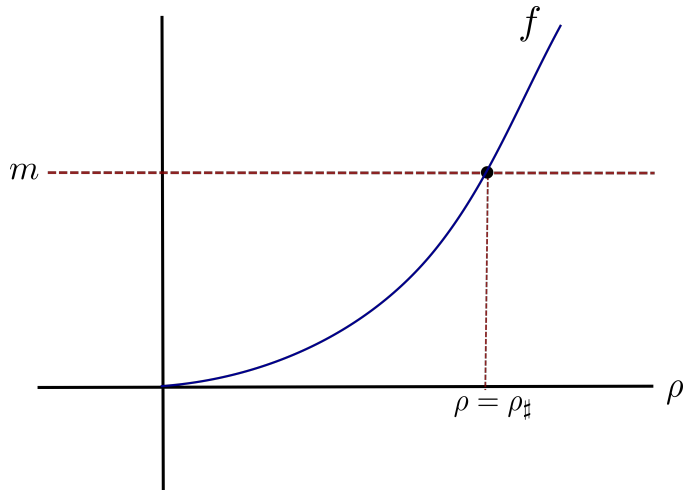


Figura 3.2: Estudio de la función f dada en (3.31) para el caso $C > 0$ y $p > 1$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

La figura a continuación muestra la existencia de una única solución tipo Maxwell $\rho(m)$, es decir, existe una única forma de colocar los N-cuerpos tal que en cada instante formen un polígono regular

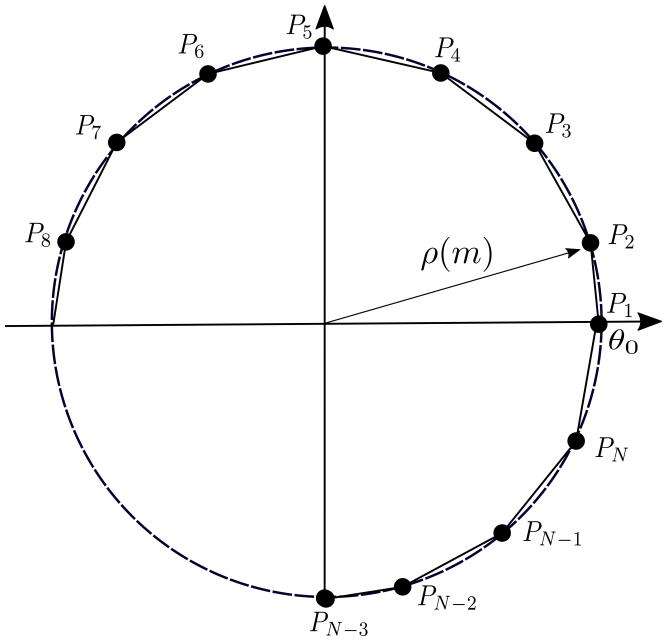


Figura 3.3: Existencia de una solución polígono regular dados $C > 0$ y $p > 1$.

El análisis del caso $C < 0$ se da en el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Para el caso $C < 0$, $p > 1$, $N > 2$ y $\omega > 0$, arbitrarios existe*

$$m_\sharp = \frac{\omega^2(p+2)\left(-BCp(p+2)A^{-1}\right)^{3/(p-1)}}{2A(p-1)}, \tag{3.33}$$

tal que tenemos lo siguiente:

1. *Si $m = m_\sharp$, entonces existe un único $\rho_\sharp = \frac{1}{2}\left(-\frac{BC}{3A}p(p+2)\right)^{1/p-1}$ que da origen a una solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo.*

2. *Si $m > m_\sharp$, entonces existen dos radios admisibles ρ_1, ρ_2 tal que $\rho_* = \left(-\frac{pBC}{2^{p-1}A}\right)^{1/p-1} < \rho_1 < \rho\sharp < \rho_2$ que dan origen a dos soluciones tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo.*

3. *Si $0 < m < m_\sharp$, entonces no existen radios admisibles.*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Demostración. Por la definición de $f(\rho)$ en (3.31) tenemos que en el caso $C < 0$ para poder tener $m > 0$ es necesario que impongamos

$$\left(\frac{A}{4}\rho^{p-1} + \frac{pBC}{2^{p+1}}\right) > 0 \Leftrightarrow \rho^{p-1} > -\frac{4p}{2^{p+1}}\frac{BC}{A} \Leftrightarrow 0 < \rho < \rho_*,$$

donde

$$\rho_* = \left(-\frac{pBC}{2^{p-1}A}\right)^{1/p-1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{pBC}{A}\right)^{1/p-1}. \tag{3.34}$$

Así, la solución del tipo Maxwell no siempre existe.

Por otro lado, el signo de $f'(\rho)$ está determinado por el signo de la expresión

$$\left(\frac{3A}{4}\rho^{p-1} + \frac{p(p+2)}{2^{p+1}}BC\right).$$

Notemos que $f'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_\sharp$ donde,

$$\rho_\sharp = \left(-\frac{p(p+2)}{2^{p-1}}\frac{BC}{3A}\right)^{1/p-1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{BC}{3A}p(p+2)\right)^{1/p-1}. \tag{3.35}$$

Veamos en que dominio $f(\rho)$ y $f'(\rho)$ son positivas. De hecho,

$$f(\rho) > 0 \ \ \wedge \ \ f'(\rho) > 0 \Leftrightarrow \rho > \frac{1}{2}\left(-\frac{BC}{3A}p(p+2)\right)^{1/p-1} \Leftrightarrow \rho > \rho_\sharp.$$

Ahora, veamos en que dominio $f(\rho) > 0$ y $f'(\rho) < 0$. De hecho,

$$f(\rho) > 0 \wedge f'(\rho) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(-\frac{pBC}{A}\right)^{1/p-1} < \rho < \frac{1}{2}\left(-\frac{BC}{3A}p(p+2)\right)^{1/p-1} \Leftrightarrow \rho_* < \rho < \rho_\sharp.$$

Además, $\lim_{\rho\to\rho_*^+} f(\rho) = +\infty$ y $\lim_{\rho\to+\infty} f(\rho) = +\infty$.

Denotaremos por $m_\sharp$ al número obtenido sustituyendo $\rho_\sharp$ en (3.31), es decir, $m_\sharp = f(\rho_\sharp)$ (vea Figura 3.4). Por lo tanto, se tiene que:

1. Si $m = m_\sharp$ existe un único radio admisible $\rho > 0$ denotado por $\rho_\sharp$ que da origen a una solución tipo Maxwell.

2. Si $m > m_\sharp$, entonces existen dos radios admisibles ρ_1 y ρ_2 tal que $\rho_1 < \rho_\sharp < \rho_2$ y cada una da origen a una solución tipo Maxwell.

3. Si $0 < m < m_\sharp$, no existen radios admisibles.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

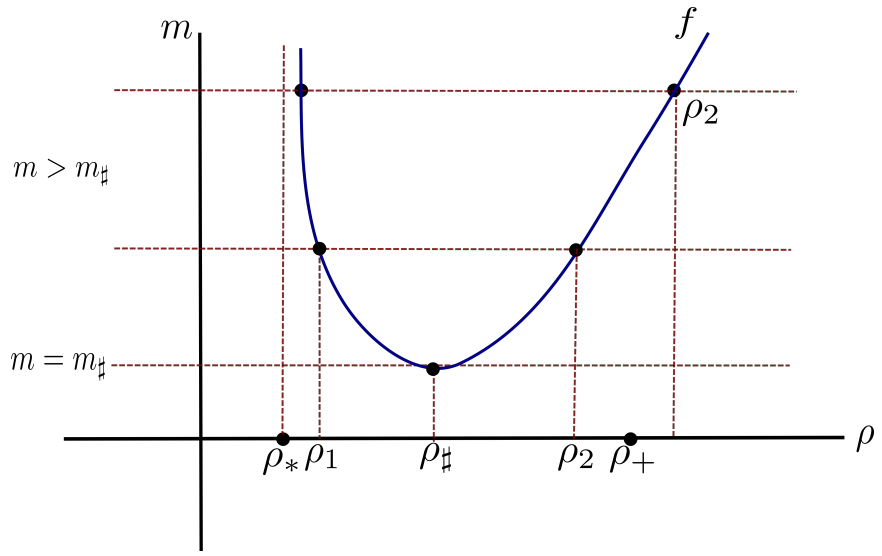


Figura 3.4: Estudio de la función f dada en (3.31) para el caso $C < 0$ y $p > 1$.

Así, hemos concluido la demostración del teorema. ■

La figura a continuación muestra la existencia de dos soluciones tipo Maxwell $\rho_1(m)$ y $\rho_2(m)$, es decir, existen al menos dos formas de colocar los N-cuerpos tal que en cada instante formen un polígono regular

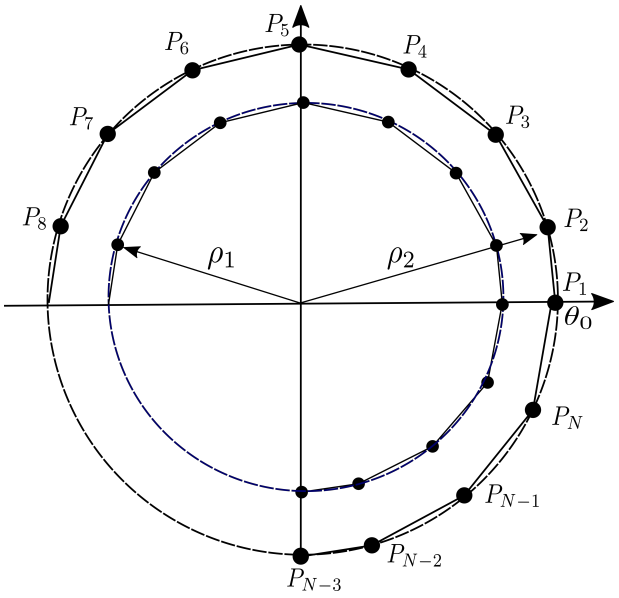


Figura 3.5: Existencia de dos soluciones polígono regular dados $C < 0$ y $p > 1$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

3.2. Equilibrio relativo en el problema tipo Maxwell con potencial casi-homogéneo

Las ecuaciones de movimiento de las partículas son dadas por (3.1) donde el potencial casi-homogéneo es dado por

$$W(\boldsymbol{r}) = \sum_{1\leq k<j\leq N} \left[\frac{m^2}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|} + \frac{m^2 C}{\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\|^p} \right]. \tag{3.36}$$

El momento lineal de la k-ésima partícula viene dada por $\boldsymbol{p}_k = m\dot{\boldsymbol{r}}_k$ con $k = 1, \ldots, N$. Luego, escribimos las ecuaciones de movimiento en su forma Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p} = H_{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} &= \nabla W(\boldsymbol{r}) = -H_{\boldsymbol{r}}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

cuyo Hamiltoniano es

$$H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p} - W(\boldsymbol{r}),$$

donde $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$, $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ y $\boldsymbol{M} = diag(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ con

$$M_k = \begin{pmatrix} m_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_k \end{pmatrix}_{3N\times 3N},$$

para cada $k = 1, \ldots, N$, donde $\boldsymbol{M} = mI$.

El sistema en (3.37) puede ser escrito en componentes como sigue

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_k &= m^{-1}\boldsymbol{p}_k = H_{\boldsymbol{p}_k} \\ \dot{\boldsymbol{p}}_k &= \nabla W(\boldsymbol{r}_k) = -H_{\boldsymbol{r}_k}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ahora bien, para que las soluciones circulares anteriormente estudiadas se encuentren en equilibrio ellas deben estar en un sistema giratorio de coordenadas, de ahí el nombre de equilibrios relativos.

Tomemos el centro de masa fijo en el origen de coordenadas. Entonces, supongamos que estas soluciones de equilibrio existen y son dadas por el siguiente cambio de coordenadas

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\boldsymbol{r}_k = e^{\omega \boldsymbol{L}_k t}\boldsymbol{x}_k \quad \text{y} \quad \boldsymbol{p}_k = e^{\omega \boldsymbol{L}_k t}\boldsymbol{y}_k, \tag{3.39}$$

cuyo sistema gira con velocidad angular constante ω y donde $\boldsymbol{L}_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Derivando las ecuaciones en (3.39) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_k &= \omega \boldsymbol{L}_k e^{\omega \boldsymbol{L}_k t}\boldsymbol{x}_k + e^{\omega \boldsymbol{L}_k t}\dot{\boldsymbol{x}}_k \\ \dot{\boldsymbol{p}}_k &= \omega \boldsymbol{L}_k e^{\omega \boldsymbol{L}_k t}\boldsymbol{y}_k + e^{\omega \boldsymbol{L}_k t}\dot{\boldsymbol{y}}_k. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Luego, reemplazando las ecuaciones del sistema (3.38) en (3.40) obtenemos las nuevas ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_k &= m^{-1}\boldsymbol{y}_k - \omega \boldsymbol{L}_k \boldsymbol{x}_k \\ \dot{\boldsymbol{y}}_k &= \sum_{j=1, j\neq k}^{N} \left[\frac{m^2(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k)}{\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k\|^3} + \frac{pm^2 C(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k)}{\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k\|^{p+2}} - \omega \boldsymbol{L}_k \boldsymbol{y}_k \right]. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Estas ecuaciones tienen como Hamiltoniano

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T m^{-1}\boldsymbol{y} + \omega \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{L}\boldsymbol{y} - W(\boldsymbol{x}). \tag{3.42}$$

Con este Hamiltoniano obtenemos la fórmula Hamiltoniana del sistema (3.41). En efecto, usando propiedades del producto interno en (3.42) tenemos

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{y}, m^{-1}\boldsymbol{y} \right\rangle + \omega \left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{y} \right\rangle - W(\boldsymbol{x}).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{y}_k} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_k}\left\langle \boldsymbol{y}_k, m^{-1}\boldsymbol{y}_k \right\rangle + \omega \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_k}\left\langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{y}_k \right\rangle \\ &= m^{-1}\boldsymbol{y}_k - \omega \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_k, \end{aligned} \tag{3.43}$$

y

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}_k} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\left\langle \boldsymbol{y}_k, m^{-1}\boldsymbol{y}_k \right\rangle + \omega \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\left\langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{y}_k \right\rangle - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k} W(x_k) \\ &= \nabla W(\boldsymbol{x}_k) - \omega \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}_k. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Así, de las ecuaciones (3.43) y (3.44) obtenemos la fórmula Hamiltoniana para el sistema (3.41) la cual es dada por

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= m^{-1}\boldsymbol{y} - \omega \boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = H_{\boldsymbol{y}} \\ \dot{\boldsymbol{y}} &= \nabla W(\boldsymbol{x}) - \omega \boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = -H_{\boldsymbol{x}}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

donde $\boldsymbol{L} = diag(\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2, \ldots, \boldsymbol{L}_N)$ y $W(x)$ es el potencial casi-homogéneo (3.36) en las nuevas coordenadas.

Un equilibrio de (3.37) ahora corresponde a un equilibrio relativo de las soluciones (3.45), es decir,

$$\begin{aligned} m^{-1}\boldsymbol{y} - \omega \boldsymbol{L}\boldsymbol{x} &= 0 \\ \nabla W(\boldsymbol{x}) - \omega \boldsymbol{L}\boldsymbol{y} &= 0. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Luego,

$$\nabla W(\boldsymbol{x}) = -\omega^2 m \boldsymbol{x}. \tag{3.47}$$

De esto, usando el mismo procedimiento es fácil probar que $\boldsymbol{x}^*$ es un equilibrio relativo para U y V, es decir,

$$\nabla U(\boldsymbol{x}) = -\mu m \boldsymbol{x}^* \quad \text{y} \quad \nabla V(\boldsymbol{x}) = -\nu m \boldsymbol{x}^*. \tag{3.48}$$

Los valores de μ y ν se obtienen en la siguiente sección.

3.2.1. Análisis del equilibrio relativo

La solución particular $\boldsymbol{r}_k(t)$ dada en la sección anterior mediante un cambio de coordenadas adecuado (coordenadas giratorias) se transforma en un equilibrio del sistema (3.45). Luego, este equilibrio debe satisfacer (3.47) lo cual implica que el equilibrio corresponda a un equilibrio relativo de dicho sistema el cual es dado por

$$\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \ldots, \boldsymbol{x}_N^*) = \rho \boldsymbol{r}^*, \tag{3.49}$$

donde

$$\boldsymbol{x}_k^* = \rho \boldsymbol{r}_k^*, \tag{3.50}$$

y tal que $\boldsymbol{r}_k^* = e^{i\theta_k}$.

Un resultado importante de este capítulo es justificar que el equilibrio relativo $\boldsymbol{x}^*$ es un equilibrio relativo simultáneo para W, U y V, es decir, que tanto W como U y V evaluados en el equilibrio relativo son múltiplos de la posición de equilibrio.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Proposición 3.1. *El equilibrio relativo $\boldsymbol{x}^*$ es un equilibrio relativo simultáneo para U y V.*

Demostración. Calculando el gradiente de $U(\boldsymbol{x}^*)$ y sabiendo que la parte imaginaria de la ecuación (3.10) es nula, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{r}_k} &= \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \frac{m^2(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k\|^3}\\ &= e^{i\theta_k} m^2 \frac{\rho}{\rho^3} \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \frac{1}{d_{jk}^3}[(\cos(\theta_j-\theta_k)-1), -\sin(\theta_j-\theta_k)]\\ &= e^{i\theta_k} m^2 \frac{\rho}{\rho^3} \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \frac{[(\cos(\theta_j-\theta_k)-1)]}{d_{jk}^3}\\ &= -\left(\frac{Am^2}{4\rho^3}\right)\rho e^{i\theta_k} = -\left(\frac{Am^2}{4\rho^3}\right)\rho \boldsymbol{r}_k^* = -\left(\frac{Am^2}{4\rho^3}\right)\boldsymbol{x}_k^*.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Además, de (3.48) tenemos que $\nabla U(\boldsymbol{x}^*) = -\mu m \boldsymbol{x}^*$, entonces,

$$-\frac{Am^2}{4\rho^3}\cdot \boldsymbol{x}^* = -\mu m \boldsymbol{x}^*,$$

de donde

$$\mu = \frac{Am}{4\rho^3}. \tag{3.52}$$

Ahora, calculando $\nabla V(\boldsymbol{x}^*)$ y sabiendo que la parte imaginaria de la ecuación (3.10) es nula, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{r}_k} &= \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \frac{m^2 pC(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k\|^{p+2}}\\ &= e^{i\theta_k} m^2 pC \frac{\rho}{\rho^{p+2}} \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \frac{1}{d_{jk}^{p+2}}[(\cos(\theta_j-\theta_k)-1), -\sin(\theta_j-\theta_k)]\\ &= e^{i\theta_k} m^2 \frac{pBC}{2^{p+1}} \frac{\rho}{\rho^{p+2}} \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \frac{[(\cos(\theta_j-\theta_k)-1)]}{d_{jk}^{p+2}}\\ &= -\left(\frac{m^2 pBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}\right)\rho e^{i\theta_k} = -\left(\frac{m^2 pBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}\right)\boldsymbol{x}_k^*.\end{aligned} \tag{3.53}$$

Análogamente, de (3.48) sabemos que $\nabla V(\boldsymbol{x}^*) = -\nu m \boldsymbol{x}^*$, entonces,

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$$-\left(\frac{m^2pBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}\right)\boldsymbol{x}^* = -\nu m\boldsymbol{x}^*,$$

de donde

$$\nu = \frac{mpBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}. \tag{3.54}$$

Observamos que tanto el gradiente de U como el de V evaluado en el equilibrio relativo son múltiplos de la posición de equilibrio. Por lo tanto, x^* es un equilibrio relativo simultáneo para ambos potenciales. ■

Observación 3.1. *En las ecuaciones* (3.52) *y* (3.54) *notamos que* μ *depende de* (m, p) *y* ν *depende de* (m, p, ρ) *lo cual hace que calcular* μ *y* ν *no sea tan justificable.*

Proposición 3.2. *El equilibrio relativo* $\boldsymbol{x}^*$ *es un equilibrio relativo simultáneo para* W*.*

Demostración. Calculando el gradiente de $W(\boldsymbol{x}^*)$ y sabiendo que la parte imaginaria de la ecuación (3.10) es nula, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{r}_k} &= \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \frac{m^2(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k\|^3} + \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \frac{m^2pC(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k\|^{p+2}} \\
&= e^{i\theta_k} m^2 \frac{\rho}{\rho^3} \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \frac{1}{d_{jk}^3}[(\cos(\theta_j - \theta_k) - 1), -\sin(\theta_j - \theta_k)] \\
&+ e^{i\theta_k} m^2 pC \frac{\rho_h}{\rho^{p+2}} \sum_{j=1,j\neq k}^{N} \frac{1}{d_{jk}^{p+2}}[(\cos(\theta_j - \theta_k) - 1), -\sin(\theta_j - \theta_k)] \\
&= -\left(\frac{Am^2}{4\rho^3}\right)\rho e^{i\theta_k} - \left(\frac{m^2pBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}\right)\rho e^{i\theta_k} \\
&= -\left(\frac{Am^2}{4\rho^3} + \frac{m^2pBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}\right)\rho e^{i\theta_k} \\
&= -\left(\frac{Am^2}{4\rho^3} + \frac{m^2pBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}\right)\boldsymbol{x}_k^*.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Observamos que el gradiente de W evaluado en el equilibrio relativo es un múltiplo de la posición de equilibrio. Por lo tanto, x^* es un equilibrio relativo simultáneo para W. ■

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Con las notaciones actuales para μ y ν el equilibrio relativo x^* satisface (3.47).

Por otro lado, de las igualdades dadas en (3.51) y (3.53) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\nabla U(\boldsymbol{x}^*) + \nabla V(\boldsymbol{x}^*) &= -\frac{Am^2}{4\rho^3}\boldsymbol{x}^* + -\frac{m^2pBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}\boldsymbol{x}^* \\
\nabla W(\boldsymbol{x}^*) &= -\left(\frac{Am^2}{4\rho^3} + \frac{m^2pBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}\right)\boldsymbol{x}^* \\
-\omega^2 m\boldsymbol{x}^* &= -m^2\left(\frac{A}{4\rho^3} + \frac{pBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}\right)\boldsymbol{x}^* \\
\omega^2 &= m\left(\frac{A}{4\rho^3} + \frac{pBC}{2^{p+1}\rho^{p+2}}\right).
\end{aligned} \tag{3.56}$$

En conclusión, $\boldsymbol{x}^*$ es un equilibrio relativo simultáneo para U, V y W.

3.3. Estabilidad de los equilibrios relativos en el problema tipo Maxwell con potencial casi-homogéneo

En esta sección estudiaremos los equilibrios asociados a las ecuaciones del sistema (3.45). Por lo tanto, haciendo $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ en tales ecuaciones tenemos

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{J}\nabla H(\boldsymbol{z}), \tag{3.57}$$

donde,

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

siendo $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad de orden $2n+2$.

Ahora bien, sabemos que un equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales debe satisfacer (3.47), pero para ello primero debemos linealizar (3.57). En efecto, sea $\boldsymbol{z}^*$ un equilibrio de (3.57), entonces $\nabla H(\boldsymbol{z}^*) = 0$ y por el primer polinomio de Taylor para la función H alrededor de $\boldsymbol{z}^*$ se tiene que

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{J}D\nabla H(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^*).$$

Usando esta expresión, el sistema linealizado de la ecuación (3.57) en el equilibrio $\boldsymbol{z}^*$ es

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{S}\boldsymbol{z}, \tag{3.58}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

donde $\boldsymbol{S}$ es la matriz simétrica $\boldsymbol{S} = D\nabla H(\boldsymbol{z}^*)$. En esta ecuación hemos utilizado la misma notación $\boldsymbol{z}$ para $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^*$.

Escribimos la ecuación lineal en (3.58) como

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}, \tag{3.59}$$

donde $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{S}$ cuya estructura es dada por

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\omega\boldsymbol{L} & m^{-1}I \\ D\nabla W(\boldsymbol{x}^*) & -\omega\boldsymbol{L} \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

Lema 3.1. *El polinomio característico de la matriz $\boldsymbol{A}$ asociado al equilibrio $\boldsymbol{x}^*$ posee los factores λ^2 y $(\lambda^2 - \alpha + 3\omega^2)$ donde $\alpha = 2\mu + (p+1)\nu$. En particular, 0 con multiplicidad 2 y $\pm\sqrt{\alpha - 3\omega^2}$ son sus valores propios.*

Demostración. Para la demostración consideraremos el subespacio $Q_1(\boldsymbol{x}^*)$ de dimensión 4 generado por los vectores de $\mathbb{R}^{4n+4}$

$$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}^*), (\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*), \tag{3.61}$$

donde $\boldsymbol{x}^*$ es el equilibrio relativo asociado a la solución tipo Maxwell definido en (3.49) para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo.

Demostraremos en primer lugar que estos vectores en $\mathbb{R}^{4n+4}$ son linealmente independientes. Sea la siguiente combinación lineal

$$\alpha_1(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{0}) + \alpha_2(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}^*) + \alpha_3(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{0}) + \alpha_4(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}.$$

Entonces,

$$(\alpha_1\boldsymbol{x}^* + \alpha_3\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*, \alpha_2\boldsymbol{x}^* + \alpha_4\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}.$$

Basta probar que $\boldsymbol{x}^*$ y $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*$ son ortogonales. Así, podemos elegir cualesquiera de las componentes e igualarla a cero. En efecto, dado $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ y $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ se tiene que

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}),$$

es decir, $\boldsymbol{x}^* \perp \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*$. Por lo tanto, $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*\}$ son LI.

Por otro lado, como las funciones potenciales U y V son homogéneas de grados -1 y $-p$ respectivamente, tenemos que sus gradientes son homogéneos de grados -2 y $-(p+1)$, entonces por el Teorema de Euler para funciones homogéneas y puesto que

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$\boldsymbol{x}^*$ es un equilibrio relativo simultáneo el cual fue demostrado en la Sección 3.2.1, se tiene que

$$\begin{aligned} D\nabla W(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x} &= -2\nabla U(\boldsymbol{x}^*) - (p+1)\nabla V(\boldsymbol{x}^*) \\ &= -2(-\mu m I\boldsymbol{x}^*) - (p+1)(-\nu m I\boldsymbol{x}^*) \\ &= 2\mu m\boldsymbol{x}^* + (p+1)\nu m\boldsymbol{x}^*. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Ahora, como W es invariante por rotaciones, ∇W también lo será, esto es,

$$\nabla W(e^{\boldsymbol{L}t}\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{L}t}\nabla W(\boldsymbol{x})$$

para cada t, con $e^{\boldsymbol{L}t} = diag(e^{\boldsymbol{L}_1 t}, e^{\boldsymbol{L}_2 t}, \ldots, e^{\boldsymbol{L}_n t})$. Por lo tanto, se sigue que

$$\nabla W(\boldsymbol{x})\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}\nabla W(\boldsymbol{x}).$$

Ahora, ya que $\boldsymbol{x}^*$ es un equilibrio relativo, entonces de (3.47) tenemos

$$D\nabla W(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^* = -\omega^2\boldsymbol{L}mI\boldsymbol{x}^*. \tag{3.63}$$

Usaremos esta igualdad para probar que $Q_1(\boldsymbol{x}^*)$ es invariante por $\boldsymbol{A}$.

En efecto, sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\omega\boldsymbol{L} & m^{-1}I \\ D\nabla W(\boldsymbol{x}^*) & -\omega\boldsymbol{L} \end{bmatrix}.$$

Demostraremos en cada ítem a continuación, que la matriz $\boldsymbol{A}$ aplicada a cada vector del subespacio $Q_1(\boldsymbol{x}^*)$ es combinación lineal de otros dos vectores de $Q_1(\boldsymbol{x}^*)$.

1. $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^* \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = (-\omega\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*, D\nabla W(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}^*) = -\omega(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*, 0) + (0, D\nabla W(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}^*).$

Pero sabemos de (3.62) que $D\nabla W(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}^* = 2(\mu m\boldsymbol{x}^*) + (p+1)(\nu m\boldsymbol{x}^*)$, entonces

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^* \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = -\omega(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*, 0) + (2\mu + (p+1)\nu)\, m(0, \boldsymbol{x}^*).$$

2. $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}^* \end{bmatrix} = (m^{-1}\boldsymbol{x}^*, -\omega\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*) = m^{-1}(\boldsymbol{x}^*, 0) - \omega(0, \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*).$

3. $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^* \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = (-\omega\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{x}^*, D\nabla W(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*) = -\omega(\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{x}^*, 0) + (0, D\nabla W(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*).$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Pero, por (3.63) $D\nabla W(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^* = -\omega^2\boldsymbol{L}m\boldsymbol{x}^*$ y puesto que $\boldsymbol{L}^2 = -I$, entonces

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^* \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \omega(\boldsymbol{x}^*, 0) - (0, \omega^2 m\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*) = \omega(\boldsymbol{x}^*, 0) - \omega^2 m(0, \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*).$$

4. $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^* \end{bmatrix} = (m^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*, -\omega\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{x}^*) = m^{-1}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*, 0) - \omega(0, \boldsymbol{L}^2\boldsymbol{x}^*)$.

Análogamente al ítem anterior tenemos que

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^* \end{bmatrix} = m^{-1}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*, 0) + \omega(0, \boldsymbol{x}^*).$$

Hemos probado entonces que $Q_1(\boldsymbol{x}^*)$ es invariante por $\boldsymbol{A}$ e implícitamente que cada vector en (3.61) de $Q_1(\boldsymbol{x}^*)$ es una combinación lineal de elementos en (3.61), y además que ellos son linealmente independientes. Así

$$\beta = \{(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}^*), (\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{0})(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^*)\}, \tag{3.64}$$

es una base para $Q_1(\boldsymbol{x}^*)$.

Luego, la matriz asociada a esta base es

$$[\boldsymbol{A}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & m^{-1} & \omega & 0 \\ (2\mu + (p+1)\nu)\, m & 0 & 0 & \omega \\ -\omega & 0 & 0 & m^{-1} \\ 0 & -\omega & -\omega^2 m & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.65}$$

Denotando $\alpha = 2\mu + (p+1)\nu$ y luego reemplazando en (3.65) obtenemos la siguiente matriz

$$[\boldsymbol{A}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & m^{-1} & \omega & 0 \\ m\alpha & 0 & 0 & \omega \\ -\omega & 0 & 0 & m^{-1} \\ 0 & -\omega & -m\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.66}$$

cuyo polinomio característico es

$$\lambda^2(\lambda^2 - \alpha + 3\omega^2).$$

Por lo tanto, se sigue que el polinomio característico se escribe como el producto de dos polinomios, uno es el factor $\lambda^2(\lambda^2 - \alpha + 3\omega^2)$ asociado al bloque que se acaba de encontrar y el otro un polinomio al que denotaremos por $\hat{p}(\lambda)$ del cual no se sabe aún que forma tiene. ■

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Observación 3.2. *El lema anterior no depende del número de cuerpos, pero si del valor de p.*

En la siguiente proposición analizaremos el valor propio $\lambda = \pm\sqrt{\alpha - 3\omega^2}$.

Proposición 3.3. *Sea $\gamma = \alpha - 3\omega^2$. Si $p \geq 2$ con $C < 0$, entonces el número $\gamma < 0$. Además, el valor propio λ es imaginario puro.*

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha - 3\omega^2 \\ &= 2\mu + (p+1)\nu - 3\omega^2 \\ &= -\mu + \nu(p-2).\end{aligned}$$

Ahora, usando las igualdades en (3.52) y (3.54) tenemos que

$$\gamma = -\frac{m}{4\rho^3}\left(2A - 2^{1-p}\rho^{1-p}BC(p+1)p\right) - 3\omega^2.$$

Luego, si $p \geq 2$ con $C < 0$ se verifica que $\gamma < 0$ y por ende el valor propio λ es imaginario puro. ■

Observación 3.3. *Para el caso $C > 0$ el signo del número γ puede ser positivo o negativo, es decir, para este caso no podemos saber con certeza si el valor propio λ es imaginario puro o no.*

Lema 3.2. *El polinomio característico de la matriz $\boldsymbol{A}$ asociado a $Q_2(\boldsymbol{x}^*)$ tiene factor*

$$(\lambda^2 + \omega^2)^2,$$

y sus valores propios son $\pm\omega i$ con multiplicidad 2.

Demostración. Para la demostración consideraremos el subespacio $Q_2(\boldsymbol{x}^*)$ de dimensión 4 generado por los vectores de $\mathbb{R}^{4n+4}$

$$(\xi, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \xi), (\eta, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \eta), \tag{3.67}$$

donde $\xi = (1, 0, 1, 0, \dots)$ y $\eta = (0, 1, 0, 1, \dots)$ son puntos de $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Demostraremos en primer lugar que estos vectores en $\mathbb{R}^{4n+4}$ son linealmente independientes. En efecto, sea la siguiente combinación lineal

$$\gamma_1(\xi, \mathbf{0}) + \gamma_2(\mathbf{0}, \xi) + \gamma_3(\eta, \mathbf{0}) + \gamma_4(\mathbf{0}, \eta) = \mathbf{0},$$

entonces,

$$(\gamma_1\xi + \gamma_3\eta, \gamma_2\xi + \gamma_4\eta) = \mathbf{0}.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Igualando las componentes a $\mathbf{0}$ y reemplazando los ξ y η respectivamente, se tiene que $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_3 = 0$. Del mismo modo llegamos a que $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_4 = 0$ lo cual implica que los vectores en (3.67) son LI.

Por otro lado, sabemos que W es invariante por traslaciones, entonces ∇W también los es. Luego,

$$\nabla W(\boldsymbol{x} + t\xi) = \nabla W(\boldsymbol{x}), \quad \text{para cada } t.$$

Así, derivando respecto a t y usando la regla de la cadena obtenemos

$$D\nabla W(\boldsymbol{x})\xi = 0, \tag{3.68}$$

y análogamente,

$$D\nabla W(\boldsymbol{x})\eta = 0. \tag{3.69}$$

Usando (3.68) y (3.69) probamos que $Q_2(x^*)$ es invariante por $\boldsymbol{A}$ de la siguiente manera. Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\omega\boldsymbol{L} & m^{-1}I \\ D\nabla W(\boldsymbol{x}) & -\omega\boldsymbol{L} \end{bmatrix}.$$

Demostraremos en cada ítem a continuación, que la matriz $\boldsymbol{A}$ aplicada a cada vector del subespacio $Q_2(\boldsymbol{x}^*)$ es combinación lineal de otros dos vectores de $Q_2(\boldsymbol{x}^*)$.

1. $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \xi \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = (-\omega\boldsymbol{L}\xi, D\nabla W(\boldsymbol{x})\xi)$.

Por (3.68) y sabiendo que

$$\boldsymbol{L}\xi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_1 & & & & \\ & \boldsymbol{L}_2 & & & \\ & & \boldsymbol{L}_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boldsymbol{L}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (0, 1, 0, 1, \dots) = \eta, \tag{3.70}$$

donde $\boldsymbol{L}_N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, para cada $N = 1, \dots, k$.

Entonces,

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \xi \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = -\omega(\eta, \mathbf{0}).$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

2. $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \xi\end{bmatrix} = m^{-1}(\xi, -\omega\boldsymbol{L}\xi) = m^{-1}(\xi,\mathbf{0}) - \omega(\mathbf{0},\boldsymbol{L}\xi).$

   Pero, por (3.70) se tiene que

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \xi\end{bmatrix} = m^{-1}(\xi,\mathbf{0}) - \omega(\mathbf{0},\eta).$$

3. $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\eta\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} = (-\omega\boldsymbol{L}\eta, D\nabla W(\boldsymbol{x})\eta)$. Por (3.69) y sabiendo que

$$\boldsymbol{L}\eta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_1 & & & & \\ & \boldsymbol{L}_2 & & & \\ & & \boldsymbol{L}_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boldsymbol{L}_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\ \vdots \\ 0\\1\end{bmatrix} = (-1,0,-1,0,\dots) = -\xi, \tag{3.71}$$

   entonces,

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\eta\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} = \omega(\xi,\mathbf{0}).$$

4. $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \eta\end{bmatrix} = m^{-1}(\eta, -\omega\boldsymbol{L}\eta) = m^{-1}(\eta,\mathbf{0}) - \omega(\mathbf{0},\boldsymbol{L}\eta).$

   Pero, por (3.71) se tiene que

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \eta\end{bmatrix} = m^{-1}(\eta,\mathbf{0}) + \omega(\mathbf{0},\xi).$$

Hemos probado entonces que $Q_2(\boldsymbol{x}^*)$ es invariante por $\boldsymbol{A}$ e implícitamente que cada vector en (3.67) de $Q_2(\boldsymbol{x}^*)$ es una combinación lineal de elementos en (3.67), y además que ellos son linealmente independientes. Así,

$$\beta' = \{(\xi,\mathbf{0}),(\mathbf{0},\xi),(\eta,\mathbf{0}),(\mathbf{0},\eta)\}, \tag{3.72}$$

es una base para $Q_2(\boldsymbol{x}^*)$.

Luego, la matriz asociada a ésta base es

$$[A]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & m^{-1} & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \\ -\omega & 0 & 0 & m^{-1} \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Por lo tanto, se sigue de un resultado del Álgebra lineal el cual nos dice que el polinomio característico se escribe como el producto de dos polinomios, uno es el factor $(\lambda^2+\omega^2)^2$ asociado al bloque que se acaba de encontrar y el otro un polinomio al que denotaremos por $\hat{p}(\lambda)$ del cual no se sabe aún que forma tiene. ■

Observación 3.4. *El lema anterior no depende del número de cuerpos, del valor de p ni del valor de la constante C.*

3.4. Estudio de la estabilidad de la solución tipo Maxwell con potencial casi-homogéneo para el caso $N=3$ y $p>1$ arbitrario

En esta sección se estudiará la estabilidad de las soluciones tipo Maxwell obtenidas anteriormente para el caso $N=3$ y $p>1$ arbitrario.

Para el caso $N=3$ la solución de equilibrio relativo es

$$\begin{aligned} &x_1=\rho, y_1=0, x_2=-\frac{1}{2}\rho, y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\rho, x_3=-\frac{1}{2}\rho, y_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho.\\ &X_1=0, Y_1=m\rho\omega, X_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}m\rho\omega, Y_2=-\frac{1}{2}m\rho\omega, X_3=\frac{\sqrt{3}}{2}m\rho\omega, Y_3=-\frac{1}{2}m\rho\omega, \end{aligned} \tag{3.73}$$

donde ρ es un radio admisible que satisface la ecuación (3.31). La parametrización de las partículas formando el triángulo equilátero es dada por

$$q_1=\rho(1,0),\ \ q_2=\rho\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \ q_3=\rho\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Las velocidades de las partículas son

$$p_1=m\rho\omega(1,0),\ \ p_2=m\rho\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),\ \ p_3=m\rho\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Verificamos que para $N=3$, $\theta_1=0$, $\theta_2=\dfrac{2\pi}{3}$, $\theta_3=\dfrac{4\pi}{3}$, de donde por las ecuaciones en (3.27) los valores de A y B son

$$\begin{aligned} A&=2\csc\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{\sqrt{3}},\\ B&=2\csc\left(\frac{\pi}{3}\right)^p=\frac{2^{p+1}}{3^{p/2}}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Luego, sustituyendo los valores de A y B en (3.74) obtenemos que ρ, C, m y ω deben satisfacer

$$\frac{\omega^2}{m}\rho^{p+2} - \frac{\rho^{p-1}}{\sqrt{3}} - 3^{-p/2}Cp = 0. \tag{3.75}$$

En general, de la ecuación anterior no es fácil determinar explícitamente el o los valores de ρ admisibles. Si embargo, fijado una solución ρ podemos determinar la relación explícita entre m y el resto de los parámetros o entre C y el resto de los parámetros, a saber:

$$\begin{aligned} m &= \frac{3^{1+p/2}\rho^{p+3}\omega^2}{3Cp + 3^{(p+1)/2}\rho^p}. \\ C &= \frac{3^{p/2-1}}{mp}\rho^{p-1}\left(-\sqrt{3}m + 3\rho^3\omega^2\right). \end{aligned} \tag{3.76}$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ de 12×12 de la parte lineal dada en (3.60) para el caso $N = 3$ tiene la forma

$$\boldsymbol{A}_p = \begin{bmatrix} -\omega\boldsymbol{L} & m^{-1}I \\ Hess\ W(\boldsymbol{x}^*) & -\omega\boldsymbol{L} \end{bmatrix}, \tag{3.77}$$

donde

$$-\omega\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix},$$

y $Hess\ W(\boldsymbol{x}^*)$ es el hessiano evaluado en el valor de C dado por

$$Hess\ W(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{m\left(-\sqrt{3}m(p-1)+(3p+2)\rho^3\omega^2\right)}{6\rho^3} & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \frac{m\omega^2}{3} & a_{24} & a_{25} & 0 \\ a_{31} & \frac{m\omega^2}{3} & a_{33} & a_{34} & 0 & a_{36} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & \frac{m\left(-\sqrt{3}m(p-1)+3(p-2)\rho^3\omega^2\right)}{18\rho^3} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}.$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Las entradas de esta matriz tienen la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
a_{12} &= \frac{m\left(\sqrt{3}m(p-1)-(3p+2)\rho^3\omega^2\right)}{12\rho^3} = a_{13} = a_{21} = a_{31},\\
a_{15} &= \frac{m\left(m-mp+\sqrt{3}(p+2)\rho^3\omega^2\right)}{12\rho^3} = a_{24} = a_{36} = a_{42} = a_{51} = a_{63},\\
a_{16} &= \frac{m\left(m(p-1)-\sqrt{3}(p+2)\rho^3\omega^2\right)}{12\rho^3} = a_{25} = a_{34} = a_{43} = a_{52} = a_{61},\\
a_{22} &= -\frac{m\left(\sqrt{3}m(p-1)+(2-3p)\rho^3\omega^2\right)}{12\rho^3} = a_{33},\\
a_{45} &= \frac{m\left(\sqrt{3}m(p-1)-3(p-2)\rho^3\omega^2\right)}{36\rho^3} = a_{46} = a_{54} = a_{64},\\
a_{55} &= \frac{m\left(-5\sqrt{3}m(p-1)+3(5p+2)\rho^3\omega^2\right)}{36\rho^3} = a_{66},\\
a_{56} &= \frac{m\left(\sqrt{3}m(p-1)-3(p+1)\rho^3\omega^2\right)}{9\rho^3} = a_{65}.
\end{aligned}
$$

Verificamos que el polinomio característico asociado a $\boldsymbol{A}_p$ tiene la forma

$$C_{\boldsymbol{A}_p}(\lambda) = \frac{1}{36\rho^9}\lambda^2(\lambda^2+\omega^2)^2\bar{p}(\lambda), \tag{3.78}$$

con $\bar{p}(\lambda)$ polinomio de grado 6.

Los valores de μ y ν dados en (3.52) y (3.54), respectivamente, para $N=3$ tienen la siguiente forma dados C y m en (3.76)

$$
\begin{aligned}
&\mu = \frac{m}{\sqrt{3}\rho^3} \quad \text{y} \quad \nu = -\frac{m}{\sqrt{3}\rho^3}+\omega^2.\\
&\mu = \frac{p\omega^2}{Cp+3^{(p-1)/2}\rho^{p-1}} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{Cp\omega^2}{Cp+3^{(p-1)/2}\rho^{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, como ya sabíamos de la Sección 3.3 y Lemas 3.1, 3.2 el polinomio característico tiene 8 valores propios conocidos: 2 valores propios nulos, 4 imaginarios puros dados por $\pm i\omega$ y los otros 2 valores propios están dados por $\pm\sqrt{\alpha-3\omega^2} = \pm\sqrt{-\frac{m(p-1)}{\sqrt{3}\rho^3}+(p-2)\omega^2}$. Los restantes 4 valores propios están asociados a las raíces del polinomio cuadrático en λ^2 dado de forma general por

$$\hat{p}(x) = x^2 + a_1x + a_0, \tag{3.79}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

donde,

$$a_1 = \frac{1}{12\rho^6}\left(8\sqrt{3}pm\rho^3 + 4\ 3^{(2-p)/2}pmC(p+1)\rho^{4-p} + 12(1-2p)\rho^6\omega^2\right), \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 = &\frac{1}{12\rho^6}\left(m^2(5p^2+6p+5) + 4\ 3^{1-p}p^2(p+1)^2m^2C^2\rho^{2(1-p)}\right)\\ &+\frac{1}{12\rho^6}\left(8\ 3^{(1-p)/2}p(p+1)^2m^2C\rho^{1-p} - 4\sqrt{3}m\rho^3\omega^2\right)\\ &+\frac{1}{12\rho^6}\left(-18\sqrt{3}pm\rho^3\omega^2 - 10\sqrt{3}p^2m\rho^3\omega^2\right)\\ &-\frac{1}{12\rho^6}\left(8\ 3^{(2-p)/2}p(p+1)^2mC\rho^{4-p}\omega^2 + 3(5p^2+12p+8)\rho^6\omega^4\right).\end{aligned} \tag{3.81}$$

El discriminante de $p(\hat{x})$ viene dado por

$$\begin{aligned}D = &-9p^2(p+1)^2m^2C^2\rho^2 - 2\ 3^{p/2}p(p+1)mC\rho^{p+1}\left(2\sqrt{3}m(p+2) - 3(2p+5)\rho^3\omega^2\right)\\ &-3^p\rho^{2p}\left(m^2(p+1)(p+5) - 2\sqrt{3}m(p(p+11)+2)\rho^3\omega^2 + 3(p(p+16)+7)\rho^6\omega^4\right).\end{aligned} \tag{3.82}$$

Para realizar el estudio de la estabilidad evaluamos a_1 y el discriminante D respecto a la masa dada en (3.76). Luego (3.80) y (3.82) son equivalentes a

$$\hat{a}_1 = \frac{\omega^2\left(-3p(p-2)C + v\right)}{3pC+v}, \tag{3.83}$$

y

$$\hat{D} = -\frac{8\ \omega^4}{(3pC+v)^2}\left(9p^3C^2 + 3p(p+1)Cv + v^2\right), \tag{3.84}$$

donde $v = u\alpha$, $\alpha = 3^{(p+1)/2}$ y $u = \rho^{p-1}$.

Las raíces del polinomio cuadrático en x son dadas por

$$x_- = -\frac{\hat{a}_1 - \sqrt{\hat{D}}}{2}, \tag{3.85}$$

y

$$x_+ = \frac{-\hat{a}_1 + \sqrt{\hat{D}}}{2}. \tag{3.86}$$

Sabemos por el Teorema 3.2 de la Sección 3.1 que para $C > 0$ y $p > 1$ existe un único radio $\rho > 0$ admisible fijada la masa m. A continuación, verificaremos mediante el siguiente teorema el tipo de estabilidad de la solución asociada.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Teorema 3.4. *Si $C > 0$, $p > 1$ y $m > 0$, entonces la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho = \rho(m)$ dado en Teorema 3.2 es inestable en el sentido de Lyapunov.*

Demostración. Como $C > 0$ se sigue inmediatamente de (3.84) que $\hat{D} < 0$ por ende las raíces x_- y x_+ dadas en (3.85) y (3.86) respectivamente son complejas. Luego, la solución tipo Maxwell es inestable en el sentido de Lyapunov. ■

A continuación analizaremos el caso $C < 0$. Notamos que el $sgn(\hat{D}) = -sgn(v^2 + 3p(p+1)Cv + 9p^3C^2)$. Por lo tanto, ahora nuestro objetivo es analizar el comportamiento del polinomio cuadrático

$$h(v) := v^2 + 3p(p+1)Cv + 9p^3C^2. \tag{3.87}$$

Lema 3.3. *Sea $C < 0$ y $p > 1$. Entonces, tenemos que*

1. $\hat{D} = 0 \Leftrightarrow v = v_+ = -3p^2C$ *y* $v = v_- = -3pC$.
2. $\hat{D} > 0 \Leftrightarrow v_* < v < v_+$.
3. $\hat{D} < 0 \Leftrightarrow v > v_+$.

El gráfico de $\hat{D}$ se encuentra en la Figura 3.6.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} h(v) = 0 \Leftrightarrow v &= \frac{1}{2}\left(-3p(p+1)C \pm \sqrt{9p^2(p+1)^2C^2 - 36p^3C^2}\right) \\ \Leftrightarrow v &= \frac{1}{2}\left(-3p(p+1)C \pm \sqrt{9p^2C^2((p+1)^2 - 4p)}\right) \\ \Leftrightarrow v &= \frac{1}{2}\left(-3p(p+1)C \pm 3p|C|\sqrt{p^2 - 2p + 1}\right) \\ \Leftrightarrow v &= \frac{1}{2}\left(-3p(p+1)C \pm 3p(p-1)C\right). \end{aligned}$$

Luego,

$$v_+ = \frac{-3pC}{2}((p+1) + (p-1)) = -3p^2C > 0, \tag{3.88}$$

$$v_- = \frac{-3pC}{2}((p+1) - (p-1)) = -3pC = v_* > 0, \tag{3.89}$$

claramente $v_* < v_+$. Esto demuestra la parte 1 del lema.

La prueba de los ítems 2 y 3 del lema son inmediatos pues notamos que $h(v) < 0$ si $v_* < v < v_+$ y $h(v) > 0$ si $v > v_+$. Dado que $sgn(\hat{D}) = -sgn(h)$, de lo anterior se concluye el lema. ■

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

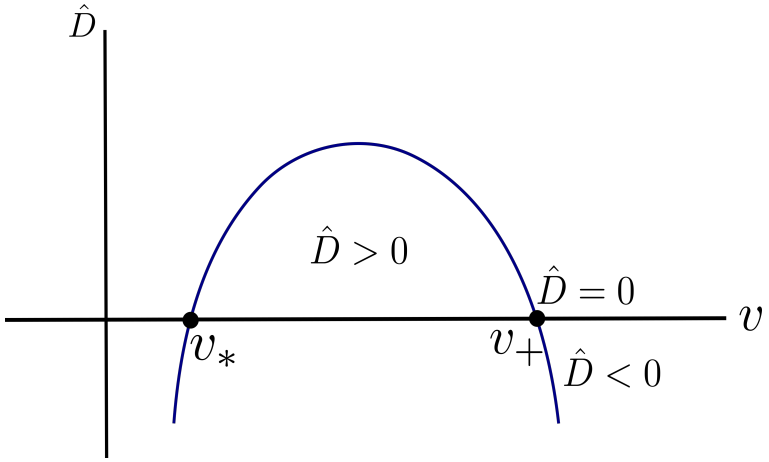


Figura 3.6: Gráfico de $\hat{D}$ con $C < 0$ y $p > 1$.

Teorema 3.5. *Si $C < 0$, $p > 1$ y $m > m_\sharp$, entonces la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho = \rho_2(m) > \rho_+$ dado en Teorema 3.3 es inestable en el sentido de Lyapunov.*

Demostración. En efecto, por el ítem 3 del Lema 3.3 sabemos que $\hat{D} < 0$ en $v > v_+$ lo cual implica que, tanto x_- como x_+ son complejas. Así, la solución del tipo Maxwell ρ_2 es inestable en el sentido de Lyapunov, lo cual prueba el teorema. ■

Por otro lado, de la ecuación (3.35) tenemos que

$$v_\sharp = -p(p+2)C. \tag{3.90}$$

Afirmamos que $v_+ > v_\sharp$. De hecho, $-3p^2C > -p(p+2)C$, entonces $p > 1$.

Lema 3.4. *Para $C < 0$ y $p > 1$. Si $v > v_*$, entonces $\hat{a}_1$ siempre es positivo.*

Demostración. En primer lugar vamos a verificar el signo del denominados de $\hat{a}_1$. En efecto, sabemos que $v > v_*$, es decir, $v > -3pC$ luego, sumando ambos lados de la desigualdad por $3pC$ obtenemos $v + 3pC > 0$.

Por otro lado, de la desigualdad $v > v_*$ se tiene $-3p(p-2)C+v > -3p(p-1)C > 0$. Luego, el numerador de $\hat{a}_1$ es positivo.

Esto prueba que $\hat{a}_1 > 0$ en $v > v_*$ para todo v. ■

Corolario 3.1. *Para $C < 0$ y $p > 1$, $v_* \leq v \leq v_+$, entonces x_- siempre es negativa.*

Demostración. En efecto, la prueba es inmediata usando los Lemas 3.3 y 3.4. Es decir, tenemos que $x_- < 0$. Así, el corolario queda demostrado. ■

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

A continuación, analizaremos la raíz x_+ del polinomio cuadrático $\hat{p}(x)$ dada en (3.86).

Sustituyendo los valores de $\hat{a}$ dado en (3.83) y $\hat{D}$ dado en (3.84) obtenemos que

$$x_+ = \frac{\omega^2}{3pC+v}\left[(3p(p-2)C-v)+2\sqrt{6}\ \sqrt{\left(-3p^3C^2+p(p+1)Cv+\frac{v^2}{3}\right)}\right].$$

Ahora, sabemos por el Lema 3.4 que $3pC+v>0$. Definamos entonces la función auxiliar

$$g(v) := 3p(p-2)C-v+2\sqrt{6}\ \sqrt{\left(-3p^3C^2+p(p+1)Cv+\frac{v^2}{3}\right)}. \tag{3.91}$$

Lema 3.5. *Si $C<0$ y $p>1$, entonces la función auxiliar $g(v)<0$ en $v_*<v<v_+$.*

Demostración. De hecho, notamos que el $sgn(x_+)=sgn(g(v))$. Por lo tanto, nuestro objetivo a seguir es analizar el signo de la función auxiliar $g(v)$.

Derivando la función auxiliar g dada en (3.91) tenemos que

$$g'(v) = -1-\frac{\sqrt{2}\ \ (3p(p+1)C+2v)}{\sqrt{-9p^3C^2-3p(p+1)Cv-v^2}} \quad \forall\ v, \tag{3.92}$$

y derivando nuevamente obtenemos

$$g''(v) = -\frac{9p^2(p-1)^2C^2}{\sqrt{2}\ \ \left[-9p^3C^2-3p(p+1)Cv-v^2\right]^{3/2}} \quad \forall\ v>v^*. \tag{3.93}$$

Notamos que la segunda derivada siempre es negativa, por lo tanto g' es decreciente para todo v. Luego, por definición de función decreciente

$$g'(v_\sharp) < g'(v) < g'(v_*). \tag{3.94}$$

Afirmamos que $g'(v_\sharp)=0$. De hecho, evaluando $v_\sharp$ en la ecuación (3.92) tenemos

$$\begin{aligned} g'(v_\sharp) &= -1-\frac{\sqrt{2}\ \ [3p(p+1)C-2p(p+2)C]}{\left[-9p^3C^2+3p^2(p+1)(p+2)C^2-p^2(p+2)^2C^2-p^2(p+2)^2C^2\right]^{1/2}} \\ &= -1+\frac{\sqrt{2}\ \ pC(p-1)}{pC\left[-9p+3p(p+1)(p+2)-(p+2)^2\right]^{1/2}} = -1+\frac{\sqrt{2}\ \ (p-1)}{\sqrt{2(p-1)^2}} = 0. \end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Así, $0 = g'(v_\sharp) < g'(v) < g'(v_*)$, por tanto g es creciente en $(v_*, v_\sharp)$. Luego,

$$g(v_*) < g(v) < g(v_\sharp). \tag{3.95}$$

De manera análoga afirmamos que $g(v_\sharp) = 0$. De hecho, evaluando $v_\sharp$ en la ecuación (3.91) tenemos

$$\begin{aligned} g(v\sharp) &= 3p(p-2)C + p(p+2)C + 2\sqrt{6}\ \sqrt{\left(-3p^3C^2 - p^2(p+1)(p+2)C^2 + \frac{1}{3}(p+2)^2p^2C^2\right)} \\ &= 3p(p-2)C + p(p+2)C + 2\sqrt{6}\ \sqrt{p^2C^2\left(-3p - (p+1)(p+2) + \frac{1}{3}(p+2)^2\right)} \\ &= pC\left(4(p-1) - 2\sqrt{2}\ \sqrt{-2p^2 - 4p + 2}\right) \\ &= pC(4(p-1) - 4\ \sqrt{p^2 - 2p + 1}) = pC(4(p-1) - 4(p-1)) = 0. \end{aligned}$$

Entonces, $g(v_*) < g(v) < g(v_\sharp) = 0$, así $g < 0$ en $(v_*, v_\sharp)$.

Análogamente, como g'' es negativa, entonces g' es decreciente en $(v_\sharp, v_+)$, luego por definición de función decreciente $g'(v_+) < g'(v) < g'(v_\sharp)$ y puesto que $g'(v_\sharp) = 0$ tenemos que g es decreciente en $(v_\sharp, v_+)$. Luego, $g(v_+) < g(v) < g(v_\sharp)$ y nuevamente como $g(v_\sharp) = 0$ concluimos que $g < 0$ en $(v_\sharp, v_+)$.

Finalmente, $g < 0$ en $v_* < v < v_+$ para todo v, y así el lema queda demostrado. ■

Ahora, sabemos por el Teorema 3.3 de la Sección 3.1 que para $C < 0$, $p > 1$ y $m > m\sharp$ definido en (3.33) que existen dos radios $\rho_1, \rho_2 > 0$ admisibles fijada la masa m. A continuación, verificaremos el tipo de estabilidad de estas soluciones.

Teorema 3.6. *Si $C < 0$, $p > 1$ y $m > m_\sharp$ fijo, entonces la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho = \rho_2(m)$ con $\rho_\sharp < \rho_2(m) \leq \rho_+$ dado en Teorema 3.3 es espectralmente estable.*

Demostración. En efecto, del Lema 3.5 tenemos que $g(v) < 0$ en $(v_\sharp, v_+)$ lo cual implica que $x_+ < 0$ en $(v_\sharp, v_+)$ y también sabemos por el Corolario 3.1 que $x_- < 0$ en $(v_\sharp, v_+)$. Esto demuestra que la solución tipo Maxwell con $\rho_\sharp < \rho_2 < \rho_+$ es espectralmente estable.

Por otro lado, en el caso $v = v_+$, por el Lema 3.3 sabemos que el discriminante $\hat{D} = 0$, entonces $x_+ = x_- = -\hat{a}_1 < 0$ de acuerdo al Lema 3.4. Esto demuestra que la solución tipo Maxwell con $\rho_2 = \rho_+$ es espectralmente estable.

Esto concluye la demostración del teorema. ■

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Teorema 3.7. *Si $C < 0$, $p > 1$, $m \geq m_\sharp$, entonces la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho = \rho_1(m)$ con $\rho_* < \rho_1(m) \leq \rho_\sharp$ dado en Teorema 3.3 es espectralmente estable.*

Demostración. En efecto, del Lema 3.5 tenemos que $g(v) < 0$ en $(v_*, v_\sharp)$ lo cual implica que $x_+ < 0$ en $(v_*, v_\sharp)$. También sabemos por el Corolario 3.1 que $x_- < 0$ en $(v_*, v_\sharp)$. Esto demuestra que la solución tipo Maxwell con $\rho_1 \in (\rho_*, \rho_\sharp)$ es espectralmente estable.

Por otro lado, del Lema 3.5 tenemos que $g(v_\sharp) = 0$ lo cual implica que $x_+ = 0$ en $(v_*, v_\sharp)$, y además por Corolario 3.1, se tiene $x_- < 0$ en $v = v_*$. Esto demuestra que la solución tipo Maxwell con $\rho_1 = \rho_\sharp$ es espectralmente estable. Así, hemos concluido la demostración del teorema. ■

De todo el análisis anterior tenemos la siguiente caracterización de las soluciones tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo.

Para el caso $C > 0$ el teorema para la estabilidad es el siguiente:

Teorema 3.8. *Si $C > 0$, $p > 1$ y $m > 0$ la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho = \rho(m)$ es inestable en el sentido de Lyapunov.*

Para el caso $C < 0$ el teorema para la estabilidad es el siguiente:

Teorema 3.9. *Si $p > 1$, entonces tenemos que:*

1. *Si $C < 0$ y $m \geq m_\sharp$ la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho_1(m) \in (\rho_*, \rho_\sharp]$ es espectralmente estable.*
2. *Si $C < 0$ y $m > m_\sharp$ la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho_2(m) \in (\rho_\sharp, \rho_+]$ es espectralmente estable.*
3. *Si $C < 0$ y $m > m_\sharp$ la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho_2(m) > \rho_+$ es inestable en el sentido de Lyapunov.*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

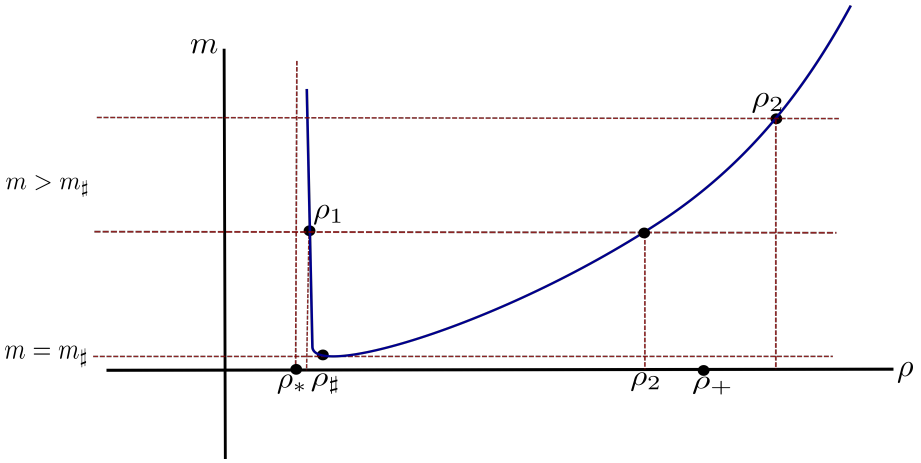
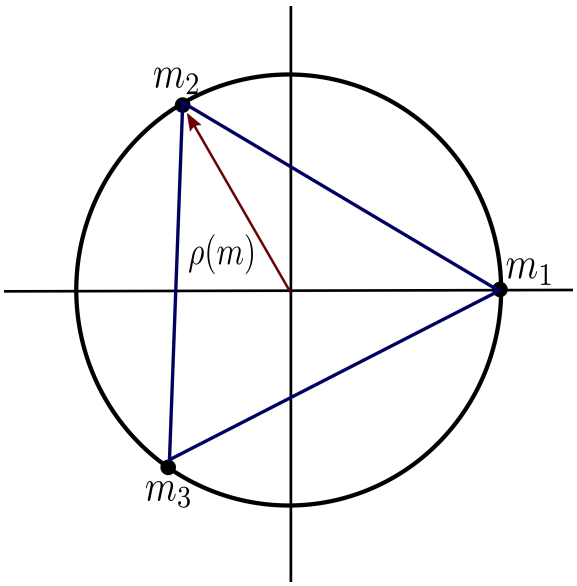
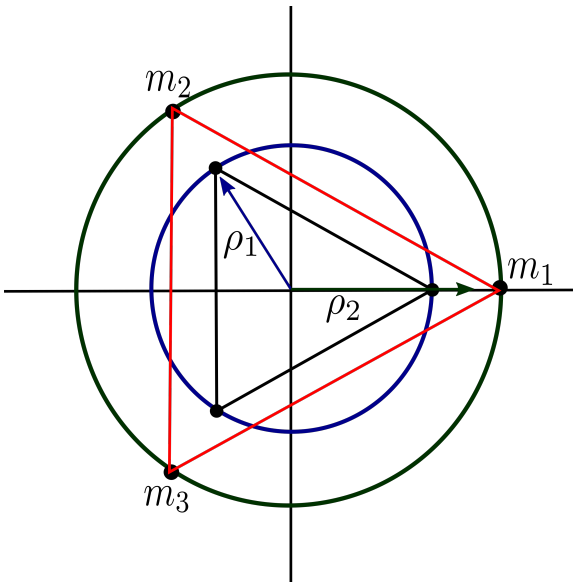


Figura 3.7: Gráfica ρ vs m dados $\omega = 1$, $C = -0{,}1$ y $p = 2$.

Las gráficas a continuación muestran el tipo de estabilidad de los 3-cuerpos para los casos $C > 0$ y $C < 0$ con $p > 1$.



(a) La solución triángulo equilátero es inestable en el sentido de Lyapunov para el caso $C > 0$ y $p > 1$.



(b) La solución triángulo equilátero ρ_1 es espectralmente estable mientras que ρ_2 es inestable en el sentido de Lyapunov para el caso $C < 0$ y $p > 1$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis hemos estudiado el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo el cual obedece a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden dado por

$$m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{j=1,j\neq k}\left[\frac{m_k m_j(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j\|^3}+\frac{pm_k m_j C_{kj}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k)}{\|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j\|^{p+2}}\right]=\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{r}_k}, \tag{4.1}$$

para cada $k=1,\ldots,N$ donde el potencial casi-homogéneo W es de la forma $W=U+V$ con U y V dados por

$$U=\sum_{1\leq k<j\leq N}\frac{m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j\|} \quad \text{y} \quad V=\sum_{1\leq k<j\leq N}\frac{m_k m_j C_{kj}}{\|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j\|^p},$$

donde C_{kj} para cada $k,j=1,\ldots,N$ son constantes reales no nulas y $m_k>0$ para todo $k=1,\ldots,N$. Notemos que U es el potencial Newtoniano y V es una función homogénea de grado $-p$ con $p>1$.

Notemos que el sistema definido en (4.1) es analítico en $\mathbb{R}^{3N}\setminus\Delta$, donde

$$\Delta=\bigcup_{k<j}\Delta_{kj}.$$

$\Delta_{kj}=\left\{\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^{3N}:\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_j\right\}$. Δ representa el conjunto de singularidades de la EDO de segundo orden y Δ_{kj} representa una colisión binaria entre la partícula $\boldsymbol{r}_k$ y $\boldsymbol{r}_j$.

Dado que estamos suponiendo que el centro de masa se encuentra en el origen de coordenadas, una colisión total de partículas corresponde a $\boldsymbol{r}=0$, si y solo si, $\boldsymbol{r}_k=0$ para todo $k=1\ldots,N$. En esta dirección hemos demostrado los siguientes resultados:

Teorema 4.1. *Sea $\boldsymbol{r}(t)=(\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t),\ldots,\boldsymbol{r}_N(t))$ una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo que sufre colisión total en $t=t_*$. Si $p=2$ y*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$C_{kj} \in \mathbb{R}$, para cada $k, j = 1, \ldots, N$, entonces t_* es finito. Además, si $p > 2$ y $sgn(C_{kj})$ es el mismo para todo $k, j = 1, \ldots, N$, entonces t_* es finito.

Teorema 4.2. *(**Sundman para el caso casi-homogéneo**). Sea $\boldsymbol{r}(t) = (\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t))$ una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo que sufre una colisión total en $t = t_*$, entonces si $p \geq 2$ y $C_{kj} < 0$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$ se tiene $\mathcal{C} = 0$.*

Otro concepto importante es el de singularidad de una solución del sistema (4.1). Dada una solución $\boldsymbol{r}(t)$ definida en su intervalo maximal (t_-, t_+), si $t_* = t_+ < \infty$ la solución se dice **singular** y t_* es una **singularidad** de la solución. Si t_* es una singularidad de la solución, entonces se dice que ella es debida a colisión si existe $\boldsymbol{r}^* \in \Delta$ tal que $\boldsymbol{r}(t) \longrightarrow \boldsymbol{r}^*$ cuando $t \to t_*$. Si $\boldsymbol{r}(t)$ cuando $t \to t_*$ no posee límite decimos que la singularidad t_* es una pseudocolisión. En nuestro estudio demostramos lo siguientes principales resultados:

Teorema 4.3. *(**Painlevé para el caso casi-homogéneo**). Dado $p \geq 2$ con $C_{kj} > 0$ para cada k, j. Si $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ es una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo (2.20) definida en un intervalo maximal $[0, t_*)$, entonces t_* es una singularidad de la solución, si y solo si,*

$$\lim_{t \to t_*} \rho(\boldsymbol{r}(t)) = 0.$$

Teorema 4.4. *(**Teorema de Von Zeipel para el caso casi-homogéneo**). Dado $p \geq 2$ con $C_{kj} > 0$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$. Si $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t))$ es una solución del problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo (2.20) definida en un intervalo $[0, t_*)$ donde t_* es una singularidad tal que $\lim_{t \to t_*} I(\boldsymbol{r}(t)) < \infty$, entonces la singularidad es debida a colisión.*

Teorema 4.5. *Dado $p \geq 2$ con $C_{kj} > 0$ para $k = 3$ y $j = 1, 2$. En el problema colineal de 3-cuerpos con potencial casi-homogéneo, si t_* es una singularidad, entonces t_* es una singularidad debida a colisión.*

Teorema 4.6. *Dado $p \geq 2$ con $C_{kj} > 0$ para cada k, j. En el problema no colineal de 3-cuerpos con potencial casi-homogéneo, todas las singularidades son debidas a colisión.*

Los teoremas anteriores resumen los principales resultados del Capítulo 2.

En el Capítulo 3 se caracterizó un tipo particular de soluciones periódicas tipo Maxwell, más precisamente se caracterizó una solución periódica donde todas las partículas se encuentran en un círculo de radio ρ, masas iguales y girando con velocidad angular

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

constante formando un polígono regular. Dichas soluciones circulares están parametrizadas por

$$\boldsymbol{r}_k(t) = \rho e^{i(\omega t+\theta_k)}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

donde,

$$\theta_k = \theta_0 + 2\pi\left(\frac{k-1}{N}\right). \quad k = 1, \ldots, N$$

Demostramos que el resultado que caracteriza el radio apropiado de una solución polígono regular en función de la masa $m_k = m$, $C_{kj} = C$ $(k, j = 1, \ldots, N)$ y $p > 1$ es el siguiente.

Teorema 4.7. *Sea $N \geq 2$, $C_{kj} = C \neq 0$ para cada $k, j = 1, \ldots, N$, $m_l = m$, $\omega > 0$ para $l = 1, \ldots, N$, entonces las funciones $\boldsymbol{r}_k(t)$ dadas en* (3.2) *definen una solución $2\pi/\omega$ periódica para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo* (3.1) *formando un polígono regular sobre un círculo de radio ρ, siempre que se satisfaga la ecuación*

$$\frac{\omega^2}{m}\rho^{p+2} - \frac{A}{4}\rho^{p-1} - \frac{pBC}{2^{p+1}} = 0.$$

La cantidad de radios apropiados para $C > 0$ se da en el siguiente teorema.

Teorema 4.8. *Para el caso $C > 0$ y $p > 1$, $N > 2$, $\omega > 0$ arbitrarios. Dado $m > 0$, existe un único radio $\rho(m)$ que da origen a una solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo.*

Mientras que para el caso $C < 0$ la cantidad de radios apropiados es como sigue.

Teorema 4.9. *Para el caso $C < 0$, $p > 1$, $N > 2$ y $\omega > 0$, arbitrarios existe*

$$m_\sharp = \frac{\omega^2(p+2)\left(-BCp(p+2)A^{-1}\right)^{3/(p-1)}}{2A(p-1)},$$

tal que tenemos lo siguiente:

1. *Si $m = m_\sharp$, entonces existe un único $\rho_\sharp = \frac{1}{2}\left(-\frac{BC}{3A}p(p+2)\right)^{1/p-1}$ que da origen a una solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo.*

2. *Si $m > m_\sharp$, entonces existen dos radios admisibles ρ_1, ρ_2 tal que $\rho_* = \left(-\frac{pBC}{2^{p-1}A}\right)^{1/p-1} < \rho_1 < \rho_\sharp < \rho_2$ que dan origen a soluciones tipo Maxwell para el problema de los N-cuerpos con potencial casi-homogéneo.*

3. *Si $0 < m < m_\sharp$, entonces no existen radios admisibles.*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

El estudio de la estabilidad fue desarrollado para el caso $N = 3$ y obtuvimos la siguiente caracterización.

Para el caso $C > 0$ el teorema para la estabilidad es el siguiente:

Teorema 4.10. *Si $C > 0$, $p > 1$ y $m > 0$ la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho = \rho(m)$ es inestable en el sentido de Lyapunov.*

Para el caso $C < 0$ el teorema para la estabilidad es el siguiente:

Teorema 4.11. *Si $p > 1$, entonces tenemos que:*

1. *Si $C < 0$ y $m \geq m_\sharp$ la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho_1(m) \in (\rho_*, \rho_\sharp]$ es espectralmente estable.*
2. *Si $C < 0$ y $m > m_\sharp$ la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho_2(m) \in (\rho_\sharp, \rho_+]$ es espectralmente estable.*
3. *Si $C < 0$ y $m > m_\sharp$ la solución tipo Maxwell para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo $\rho_2(m) > \rho_+$ es inestable en el sentido de Lyapunov.*

Como trabajo futuro, nos gustaría seguir profundizando el estudio de la dinámica de los N-cuerpos con potencial casi-homogéneo (estudio de la colisión total, singularidad debidas a colisión y soluciones polígono regular) para un caso particular del exponente p y de la constante real C_{kj}.

Otro posible trabajo sería estudiar las soluciones del problema tipo Maxwell para $N = 4$ con potencial casi-homogéneo, verificar mediante su parametrización la existencia de estas soluciones y que a través de un adecuado cambio de coordenadas podemos tener equilibrios relativos para luego analizar los valores propios de su polinomio característico y determinar el tipo de estabilidad. Además, como extensión a "priori"de esta tesis se pueden realizar animaciones en el caso $N = 3$ y visualizar como los 3-cuerpos, es decir, la configuración triángulo equilátero cambia de estabilidad.

En esta tesis se han estudiado la configuración polígono regular sin masa central para el problema de N-cuerpos con potencial casi-homogéneo tipo Maxwell, entonces como trabajo futuro podemos estudiar este mismo problema, pero ahora colocando una masa en el centro de la configuración, es decir, para $N + 1$-cuerpos. Se podría verificar la existencia de soluciones tipo Maxwell y analizar los tipos de estabilidad. Cabe recalcar que la estabilidad va a depender mucho de la masa que tenga el cuerpo central. Este tipo de problemas fue abordado por J. C. Maxwell ([23], [24]) en su estudio sobre la estabilidad de los anillos de Saturno.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Apéndice

Este Apéndice está dedicado a enunciar y demostrar algunos resultados auxiliares importantes para la presente tesis, además de algunos resultados de Análisis matemático.

4.1. Resultados auxiliares

Proposición 4.1. *El potencial casi-homogéneo W definido en* (2.1) *es invariante por traslaciones.*

Demostración. Por demostrar que, dados $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \Delta_{\Gamma_i}$ donde Γ_i es el i-ésimo aglomerado se tiene que $W_{\Gamma_i}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}) = W_{\Gamma_i}(\boldsymbol{r})$.

En efecto, puesto que $\boldsymbol{s} \in \Delta_{\Gamma_i}$, entonces $\boldsymbol{s}_j = \boldsymbol{s}_k$ si $j,k \in \Gamma_i$ y como $C_{kj} > 0$ con $p \geq 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
W_{\Gamma_i}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}) &= \sum_{k<j\in\Gamma_i} W_{kj}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}) \\
&= \sum_{k<j\in\Gamma_i} \frac{m_k m_j}{\|(\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{s}_k)-(\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{s}_j)\|^p} \left(\|(\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{s}_k)-(\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{s}_j)\|^{p-1} + C_{kj}\right) \\
&= \sum_{k<j\in\Gamma_i} \frac{m_k m_j}{\|(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j)-(\boldsymbol{s}_k-\boldsymbol{s}_j)\|^p} \left(\|(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j)+(\boldsymbol{s}_k-\boldsymbol{s}_j)\|^{p-1} + C_{kj}\right) \\
&= \sum_{k<j\in\Gamma_i} \frac{m_k m_j}{\|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j\|^p} \left(\|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j\|^{p-1} + C_{kj}\right) \\
&= \sum_{k<j\in\Gamma_i} W_{kj}(\boldsymbol{r}) = W_{\Gamma_i}(\boldsymbol{r}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$W_{\Gamma_i}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}) = W_{\Gamma_i}(\boldsymbol{r}).$$

■

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Proposición 4.2. *Considere* $\mathbb{R}^{3N}$ *un espacio vectorial con producto interno dado por*

$$\langle \boldsymbol{r}, \widetilde{\boldsymbol{r}} \rangle = \sum_{j \in \mathcal{J}} m_j \boldsymbol{r}_j^t \widetilde{\boldsymbol{r}}_j, \tag{4.3}$$

y Δ_Γ *el conjunto de singularidades, entonces*

$$\mathbb{R}^{3N} = \Delta_\Gamma \oplus (\Delta_\Gamma)^\perp = \Delta_\Gamma \oplus \ker \pi_\Gamma.$$

Demostración. En efecto, de (2.24) notemos que

a) $\pi_\Gamma \circ \pi_\Gamma = \pi_\Gamma$.

De hecho, observe que π_Γ es una nueva configuración donde en cada aglomerado Γ_i las partículas se mueven hacia el centro de masa del aglomerado, por lo que aplicando π_Γ a la nueva configuración tenemos el resultado anterior.

b) $\Delta_\Gamma = Im(\pi_\Gamma)$.

Para esta prueba mostraremos las dos contenciones.

($\subset$) Si $\boldsymbol{r} \in \Delta_\Gamma$ significa que en cada Γ_i todas las partículas se encuentran colisionando simultáneamente, por lo tanto, $\boldsymbol{r}_{i,k} = \boldsymbol{r}_{i,j}$ para cualesquiera $k, j \in \mathcal{J}$. Luego $\pi_\Gamma(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$ lo que implica $\boldsymbol{r} \in Im(\pi_\Gamma)$, es decir, $\Delta_\Gamma \subset Im(\pi_\Gamma)$.

($\supset$) Si $\widetilde{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{R}^{3N}$, entonces $\pi_\Gamma(\boldsymbol{r}) = \widetilde{\boldsymbol{r}}$ tiene la propiedad de tener las mismas coordenadas en cada aglomerado, entonces $\widetilde{\boldsymbol{r}}_j = \widetilde{\boldsymbol{r}}_k$ con $j, k \in \mathcal{J}$, esto implica que $\widetilde{\boldsymbol{r}} \in \Delta_{\Gamma_i}$ para todo i, es decir, $\widetilde{\boldsymbol{r}} \in \Delta_\Gamma$ de donde se sigue que $\Delta_\Gamma \supset Im(\pi_\Gamma)$.

c) π_Γ es un operador autoadjunto, es decir, $\langle \pi_\Gamma \boldsymbol{r}, \widetilde{\boldsymbol{r}} \rangle = \langle \boldsymbol{r}, \pi_\Gamma \widetilde{\boldsymbol{r}} \rangle$.

En efecto, de (4.3) y (2.24) tenemos que

$$\langle \pi_\Gamma \boldsymbol{r}, \widetilde{\boldsymbol{r}} \rangle_{\mathcal{J}} = \sum_{j \in \mathcal{J}} m_j \boldsymbol{Z}_i^t \widetilde{\boldsymbol{r}}_j = \boldsymbol{Z}_i^t \sum_{j \in \mathcal{J}} m_j \widetilde{\boldsymbol{r}}_j = M_i \boldsymbol{Z}_i^t \frac{1}{M_i} \sum_{j \in \mathcal{J}} m_j \widetilde{\boldsymbol{r}}_j = M_i \cdot \boldsymbol{Z}_i^t \cdot \widetilde{\boldsymbol{Z}}_j. \tag{4.4}$$

Por otro lado,

$$\langle \boldsymbol{r}, \pi_\Gamma \widetilde{\boldsymbol{r}} \rangle_{\mathcal{J}} = \sum_{i \in \mathcal{J}} m_i \widetilde{\boldsymbol{Z}}_j \boldsymbol{r}_i^t = \widetilde{\boldsymbol{Z}}_j \sum_{i \in \mathcal{J}} m_i \boldsymbol{r}_i^t = M_i \widetilde{\boldsymbol{Z}}_j \frac{1}{M_i} \sum_{i \in \mathcal{J}} m_i \boldsymbol{r}_i^t = M_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{Z}}_j \cdot \boldsymbol{Z}_i^t.$$

Así, para todo $i \in \mathcal{J}$ se cumple que

$$\langle \boldsymbol{r}, \pi_\Gamma \widetilde{\boldsymbol{r}} \rangle_{\mathcal{J}} = M_i \cdot \boldsymbol{Z}_i^t \cdot \widetilde{\boldsymbol{Z}}_i. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, de (4.4) y (4.5) se prueba la igualdad del ítem **c)**. Así π_Γ es autoadjunto.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

De esto, se tiene que $\ker \pi_\Gamma = (Im\pi_\Gamma)^\perp = (\Delta_\Gamma)^\perp$, luego el espacio de configuraciones $\mathbb{R}^{3N}$ se puede descomponer como

$$\mathbb{R}^{3N} = \Delta_\Gamma \oplus (\Delta_\Gamma)^\perp = \Delta_\Gamma \oplus \ker \pi_\Gamma.$$

■

Lema 4.1. *Si el* $\liminf_{t\to c} \rho(\boldsymbol{r}(t)) \geq a$, *entonces existe* $t_0 \in [0, t_*)$ *y* $\beta \in (0, a]$ *tal que las distancias mutuas* r_{kj} *están acotadas inferiormente por* β, *es decir,* $r_{kj} \geq \beta$ *en* $[t_0, t_*)$

Demostración. Sea

$$\psi(R) = \text{ínf}\{\rho(\boldsymbol{r}(t))/0 < |t - t_*| < R, R > 0\},$$

y considere

$$\alpha = \liminf_{t\to t_*} \rho(\boldsymbol{r}(t)) = \sup\{\psi(R), R > 0\}.$$

En efecto, sabemos por propiedad que

$$\underbrace{\liminf \rho(\boldsymbol{r}(t))}_{\alpha} = \sup \underbrace{\text{ínf}\, \rho(\boldsymbol{r}(t))}_{\sup \psi(R)},$$

y por la definición de supremo $\psi(R) \leq \alpha$ para todo R.

Tomando $a = \alpha$ tenemos que, si $0 < \beta < a$, entonces existe R_0 tal que $\beta < \psi(R_0) < a$. Por lo tanto,

$$\beta < \text{ínf}\{\rho(\boldsymbol{r}(t))/0 < |t - t_*| < R_0\}.$$

Ahora, sea

$$\gamma = \text{ínf}\{\rho(\boldsymbol{r}(t))/0 < |t - t_*| < R_0\},$$

es decir, $\beta < \gamma$. Por propiedad de ínfimo se tiene que $\gamma \leq \rho(\boldsymbol{r}(t))$ y por definición de $\rho(\boldsymbol{r}(t))$ dada en (2.1) se sigue que $\gamma \leq \text{mín}\, r_{kj}(t)$ lo cual implica que $\gamma \leq r_{kj}(t)$. Finalmente, como $\beta < \gamma \leq r_{kj}(t)$ se concluye que $\beta < r_{kj}(t)$ para todo $t \in [t_0, t_*)$. ■

4.2. Resultados de Análisis Matemático

Definición 4.1. ***(Reversibilidad)*** *Considere la EDO* $\dot{z} = f(z)$ *donde* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una función diferenciable. Diremos que el sistema arriba es* ***reversible*** *(o* T*-reversible) si existe una aplicación lineal invertible,* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longrightarrow -t$ *tal que* $f(z) = -T^{-1} f(T_z)$, *o* $T \circ f = -f \circ T$.

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Lema 4.2. *Sea f una función definida en (a,b) de clase $\mathcal{C}^2$, $f(b)=0$, $f>0$ se tiene que*

1. *Si $\ddot{f}>0$ en (t_1,b) entonces $\dot{f}<0$.*
2. *Si $\ddot{f}<0$ en (a,t_1), entonces $\dot{f}>0$.*

Demostración. Demostraremos el primer caso.

Sea $A=\{t\in(a,b)/\dot{f}(t)=0\}$ el conjunto de los puntos críticos de f, mostraremos que A es un conjunto vacío. En efecto, observe que si existiese un punto crítico de f éste debe ser mínimo. Luego no existen dos puntos críticos (mínimos), pues si existiesen t_1 y t_2 con $t_1<t_2$ (o $t_1>t_2$) tal que $\dot{f}(t_1)=\dot{f}(t)=0$ se sigue por el Teorema de Rolle que existe $c\in(t_1,t_2)$ tal que $\ddot{f}(c)=0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si existiese un punto crítico, éste es único.

Suponga ahora que existe $t_1\in(a,b)$ tal que $\dot{f}(t)=0$, entonces $\dot{f}(t)<0$ para $t\in(t_1,b)$. Luego, $f(t_1)<f(b)=0$, lo cual es absurdo, entonces $\dot{f}\neq 0$ para todo $t\in(a,b)$. Ahora, por el Teorema del Valor Medio tenemos que existe $\theta\in(a,b)$ tal que

$$f(b)-f(a)=\dot{f}(\theta)(b-a),$$

pero por la hipótesis $f(b)=0$, entonces se sigue que $\dot{f}(\theta)<0$, para todo $\theta\in(a,b)$. Como θ es arbitrario se concluye que $\dot{f}<0$.

Para el segundo caso, procedemos análogamente al caso anterior. Dado $A=\{t\in(a,b)/\dot{f}(t)=0\}$ el conjunto de los puntos críticos de f, mostraremos que A es un conjunto vacío. En efecto, observe que si existiese un punto crítico de f éste debe ser máximo. Luego no existen dos puntos críticos (máximos), pues si existiesen t_1 y t_2 con $t_1<t_2$ (o $t_1>t_2$) tal que $\dot{f}(t_1)=\dot{f}(t)=0$ se sigue por el Teorema de Rolle que existe $c\in(t_1,t_2)$ tal que $\ddot{f}(c)=0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si existiese un punto crítico, éste es único.

Ahora, suponemos que si $t_1\in(a,b)$ tal que $\dot{f}(t_1)=0$, entonces $\dot{f}(t)<0$ para $t\in(a,t_1)$. Luego, $0=f(a)<f(t_1)$, en consecuencia $f(t_1)>0$ para todo $t_1\in(a,b)$. Como t_1 es arbitrario se concluye que $\dot{f}>0$. ■

Proposición 4.3. ***(condición de Cauchy para funciones)*** *Sean $A\subset\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ un punto de acumulación de A y $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existe y es un número real.*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

2. *Para cada* ε *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in A$ *con* $0 < |x - x_0| < \delta$ *y* $0 < |y - x_0| < \delta$, *se tiene* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Lema 4.3. *Si* $\lim\limits_{t\to c} \sup f(t) = M$, *entonces existe* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k) = M$ *cuando* $t_k \to c$.

Demostración. De la definición de límite superior sabemos que

$$\lim_{t\to c} \sup f(t) = \inf_{\delta>0} \sup_{t\in B(c,\delta)} f(t).$$

Ahora bien, para cada $\delta > 0$ considere

$$M_\delta = \sup_{t\in B(c,\delta)} f(t).$$

Luego, tenemos $k \in \mathbb{N}$, por las propiedades del ínfimo se tiene que para $\varepsilon = \frac{1}{k}$ existe $\delta_k > 0$ tal que $M_{\delta_k} < M + \frac{1}{k}$. Ahora, usando las propiedades del supremo se sigue que existe $t_k \in B(c, \delta_k)$ tal que $M_{\delta_k} - \frac{1}{k} < f(t_k)$. Tenemos así que

$$M - \frac{1}{k} \leq M_{\delta_k} - \frac{1}{k} < f(t_k) \leq M_{\delta_k} < M + \frac{1}{k},$$

esto es,

$$|f(t_k) - M| < \frac{1}{k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Tomando límite cuando $k \to \infty$ en la expresión anterior concluimos que

$$\lim_{k\to\infty} f(t_k) = M,$$

cuando $t_k \to c$. ■

Lema 4.4. ***(Convexidad)*** *No existe función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *dos veces diferenciable tal que* $f > 0$ *y* $\ddot{f} < 0$ *o* $f < 0$ *y* $\ddot{f} > 0$ *en todo* $\mathbb{R}$.

Demostración. Suponga por el absurdo que existe una función f. Note que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\dot{f}(a) \neq 0$. De hecho, si $\dot{f}(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Entonces, $\ddot{f}(a) = 0$, contradiciendo la hipótesis de ser $\ddot{f}(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sin perdida de generalidad, suponga que $\dot{f}(a) > 0$.

Sea entonces $l : y = f(a)+\dot{f}(a)(x-a)$ la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Definimos la función auxiliar $g(x) = f(x) - f(a) - \dot{f}(a)(x - a)$ para todo $x < a$, notamos que $g(a) = 0$. Ahora, derivamos respecto a x obteniendo $\dot{g}(x) = \dot{f}(x) - \dot{f}(a)$ donde $\dot{g}(a) = 0$ y derivando nuevamente obtenemos $\ddot{g}(x) = \ddot{f}(x) < 0$ esto implica que g es decreciente y por definición $\dot{g}(x) > \dot{g}(a) = 0$, luego g es creciente, es decir,

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

$g(x) < g(a) = 0$, entonces $g(x) < 0$ para todo $x < a$ así $f(x) < f(a) + \dot{f}(a)(x-a) = y$ para todo $x < a$. Pero sabemos que existe un $\hat{x} \in l$ tal que $y(\hat{x}) = 0$ por lo tanto $f(\hat{x}) < 0$ lo cual es una contradicción. ■

Lema 4.5. *No existe función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, dos veces diferenciable tal que $f > 0$ y $\ddot{f} < 0$ en (a, b) con $f(x)$ tendiendo a infinito cuando x tiende para b.*

Demostración. Razonando por el absurdo, suponga que existe tal función f. Sabemos por definición que si $\ddot{f}(x) < 0$, entonces $\dot{f}(x)$ es decreciente, por lo tanto, si $x_1 < x_2$ se sigue que $\dot{f}(x_1) > \dot{f}(x_2)$. Entonces, integrando entre x_1 y x_2, se tiene que $f(x_2) < \dot{f}(x_1)x_2 + k$ donde k es una constante. Ahora, haciendo $x \to b$ tenemos que por un lado $f(x) \longrightarrow \infty$ y por otro a $\dot{f}(x_1)b + k$ lo cual es un absurdo. ■

Teorema 4.12. *(**Teorema de Euler**). Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n$ con D abierto y f diferenciable en D, entonces f es homogénea de grado m, si y sólo sí, $\langle \nabla f(x), x \rangle = mf(x)$ para cualquier x que pertenece a D.*

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

Bibliografía

[1] R. Abraham, and J. Marsden, Foundations of mechanics (No. 364). American Mathematical Soc (2008).

[2] A. Albouy, H. Cabral, and A. Santos, Some problems on the classical N-body problem. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 113(4), 369-375 (2012).

[3] P. S. Aleksandrov and B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov as a teacher. Russian Math. surveys 18 (1963).

[4] A. Ruiz, Historia y Filosofía de las Matemáticas. Editorial Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica (2003).

[5] M. Arribas, A. Elipe, T. Kalvouridis and M. Palacios, *Homographic solutions in the planar $n+1$ body problem with quasi-homogeneous potentials*. Celestial Mech Dyn Astr 99, 1–12 (2007).

[6] J. Burgos, A. Celletti and C. Gales, *Hill four-body problem with oblate bodies: an Application to the Sun-Jupiter-Hektor-Skamandrios System*. Journal Nonlinear Science 30(6), 2925-2970 (2020).

[7] H. Cabral and C. Vidal, Introducción a la Mecánica Celeste. Universidad del Bío-Bío (2015).

[8] Clairant e d'Lambert, "Théorie de la Lune". Paris, (1747).

[9] F. Diacu, *Near-collision dynamics for particle systems with quasihomogeneous potentials*. Journal of Differential Equations, Volume 128, Issue 1, Pages 58-77, ISSN 0022-0396 (1996).

[10] F. Diacu, Singularities of the N-Body Problem, in Classical and Celestial Mechanics. Princeton University Press, Princeton (2002).

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

[11] F. Diacu, E. Pérez-Chavela and M. Santoprete, *Central configurations and total collisions for quasihomogeneous N-body problems*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Volume 65, Issue 7, Pages 1425-1439 (2006).

[12] F. Diacu, V. Mioc, and C. Stoica, *Phase-space structure and regularization of Manev-type problems*. Nonlinear Analysis 41, 1029-1055 (2000).

[13] L. Euler, De motu rectilineo trium corpurum se mutuo attrahentium, Nov. Comm. Petrop, 11, 144 (1765).

[14] A. Garcia, E. Pérez-Chavela and A. Susin, *A generalization of the Poincaré compactification*. Arch. Rational Mech. Anal. 179, 285-302 (2006).

[15] H. Geiges, The Geometry of Celestial Mechanics. London Mathematical Society Student Texts 83. Cambridge University Press (2016).

[16] K. Hassan, Nonlinear Systems. Second edition. Michigan State University. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458 (1995).

[17] C. Jacobi, Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps, Comptes Rendus, t.15, 236-255 (1842).

[18] R. Jones, *Central configurations with a quasihomogeneous potential function*. Journal of mathematical physics, 49(5), 052901 (2008).

[19] S. Kirk, I. Haranas and I. Gkigkitzis, *Satellite motion in a Manev potential with drag*. Astrophys Space Sci 344-313 (2013).

[20] A. M. Lukomskaya and V. I. Smirnov, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov. Bibliografia, Moscow-Leningrad (1953).

[21] G. Manev, *Le principe de la moindre action et la gravitation*. C. R. Acad. Sci. Paris **190** 963-965 (1993).

[22] R. McGehee, Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics. Expo. Math, **4**, 335-345 (1986).

[23] J. Maxwell, *Stability of the motion of Saturn's rings*. In W D Niven, editor, The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. Cambridge University Press (1890).

[24] J. Maxwell, Stability of the motion of Saturn's rings. In S. Brush, C. W. F. Everitt, and E. Garber, editors, Maxwell on Saturn's Rings. MIT Press, Cambridge (1983).

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

[25] R. Meyer and D. Offin, Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. Third edition. Texts in Applied Mathematical Sciences, Springer (2017).

[26] V. Mioc and C. Blaga, *A class of relative equilibria in the manev five-body problem*. Hvar Observatory Bulletin, 23, 41-48 (1999).

[27] R. Moeckel, *Linear stability analysis of some symmetrical classes of relative equilibria*. Hamiltonian Dynamical Systems. IMA Vol. Math. Appl. vol 63) pp 291–317 (New York: Springer). Cincinnati, OH (1992).

[28] R. Moeckel, *Linear stability of relative equilibria with a dominant mass*. J. Dynam.Differential Equations **6**, No. 1, 37-51 (1994).

[29] I. Newton, Mathematical principles of natural philosophy (Vol. 32). Encyclopaedia Britannica, (1990).

[30] J.J. O'Connor and E. F. Robertson, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Weierstrass/.

[31] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, William Rowan Hamilton, 1805-1865, Physicists of Ireland: Passion and Precision, Institute of Physics (2002).

[32] P. Painlevé, Lecons sur la théorie analytique des équations différentielles. Hermann, Paris. Paris (1897).

[33] E. Pérez-Chavela, *El sistema solar bajo mecánica celeste*. Departamento de Matemática. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (1999).

[34] E. Pérez-Chavela and L. Vela-Arévalo, *Triple collision in the quasi-Homogeneous collinear three-body problem*. Journal of Differential Equations, 148(1), 186-211 (1998).

[35] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems. Third edition. Texts in Applied Mathematical Sciences, Springer (2017).

[36] L. Perko and L. Walter, *Regular polygon solutions of the N-body problem*. American Mathematical Society, Vol 94, No 2, pp. 301-309 (1995).

[37] H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mecánique Céleste. Dover Publ (1957).

[38] D. Saari, Collisions, Rings, and Other Newtonian N-Body Problems. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society with support from the National Science Foundation (2005).

Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas - Chile

[39] M. Santoprete, *Linear stability of the Lagrangian triangle solutions for quasihomogeneous potentials*. Celestial Mech Dyn Astr 94, 17-35 (2006).

[40] K. Sundman, Recherches sur le probléme des trois corps. Acta Societatis Scientiarum Fennicae XXXIV, No. **6**, 1-43 (1906).

[41] V. Ureche, *Perihelion advance and Manev's field*. Studia Univ. Babes¸-Bolyai, Mathematica, 44, 101-109 (1999).

[42] H. von Zeipel, Sur les singularitiés du problème des N corps. Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik **4**, 32, 1-4 (1908).

[43] A. Wintner, The Analitycal Foundations of Celestial Mechanics. Princeton; New Jersey. Princeton University Press. London: Geoffrey Cumberlege Oxford University Press, 2da Edition (1947).

[44] Z. Xia, *The existence of the non-collision singularities in Newtonian system*. Northwestern University ProQuest Dissertations Publishing (1989).

[45] S. Zhang, *The simultaneous collision orbits for N-body problems with quasihomogeneous potencials*. Differential Equations And Computational Simulations-Proceedings Of The International Conference. World Scientific, 482 (2000).